

Der Einfluß der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur
der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der
Technischen Universität Chemnitz

Jan Severin
Chemnitz 1999

Der Einfluß der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen

Von der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der
Technischen Universität Chemnitz

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl.-Ing. Jan Severin

geboren am 19.12.1966 in Hagen

eingereicht am 15.12.1998

Gutachter: Prof.Dr.-Ing. Heinz Herwig
Prof.Dr.-Ing. Venkatesa Vasanta Ram
Prof.Dr.-Ing. Jiri Plichta

Chemnitz, den 26.03.1999

Severin, Jan

Der Einfluß der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen

Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Technische Thermodynamik, Chemnitz, 1999

168 Seiten, 47 Abbildungen, 8 Tabellen

Am Beispiel verschiedener Strömungstypen wird die Stabilität von Strömungen unter Einfluß eines Temperaturfeldes untersucht. Eine reguläre Störungsrechnung wird durchgeführt, um die Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte systematisch und allgemeingültig erfassen zu können. Die Ergebnisse werden in Form asymptotischer Reihen für die kritischen Kennzahlen der jeweiligen Probleme angegeben.

Sowohl die Orr–Sommerfeld–Gleichungen als auch die PSE–Gleichungen, jeweils mit variablen Stoffwerten, kommen bei der Untersuchung von Grenzschichtströmungen zum Einsatz. Von besonderem Interesse sind hier die Unterschiede in den Lösungen beider mathematischer Modelle bezüglich der Effekte variabler Stoffwerte. Es zeigt sich, daß die Differenzen in den Lösungen beider Theorien für den Fall konstanter und für den Fall variabler Stoffwerte gleich groß sind.

Für die Grenzschichtströmung bei natürlicher Konvektion an einer beheizten vertikalen Wand werden die vollständigen PSE–Gleichungen gelöst. Hier zeigen sich starke Abweichungen zur lokalen parallelen Theorie (Orr–Sommerfeld–Gleichungen).

Schlagworte

lineare primäre Stabilitätstheorie – natürliche Konvektion – erzwungene Konvektion – PSE – Orr–Sommerfeld–Gleichungen – Temperatureffekte – variable Stoffwerte – reguläre Störungsrechnung – Kollokationsmethode – Tschebyscheff–Polynome

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1995–1998 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur Technische Thermodynamik der Technischen Universität Chemnitz.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.–Ing. Heinz Herwig, der diese Arbeit angeregt und ihre Entstehung während der gesamten Zeit wohlwollend unterstützt hat.

Bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Professur Technische Thermodynamik bedanke ich mich für das gute Arbeitsklima und die freundliche Aufnahme in den Mitarbeiterkreis.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir immer beratend zur Seite gestanden haben. Dank gebührt auch Leah und Kati Grandi, die mich die letzten Jahre mit Geduld und Verständnis begleitet haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	6
2.1	Vorbemerkungen	6
2.2	Grundgleichungen	11
2.2.1	Lineare Stördifferentialgleichungen	12
2.2.2	Parabolische Stabilitätsgleichungen für Grenzschichtströmungen (PSE-Gleichungen)	14
2.2.3	Erweiterte Orr–Sommerfeld–Gleichungen für Grenzschichtströmungen	25
2.2.4	Stabilitätsgleichungen für die horizontale Fluidschicht	26
2.3	Methodik zur Erfassung des Einflusses der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen	28
2.3.1	Klassifizierung der Strömungstypen	28
2.3.2	Asymptotische Methode	31
2.3.3	Kombinierte Methode	40
3	Stabilität einer horizontalen beheizten Fluidschicht; stark gekoppeltes Problem	43
3.1	Vorbemerkungen	43

3.2	Temperaturfeld des Grundzustandes	46
3.3	Stabilitätsanalyse der horizontalen beheizten Fluidschicht	47
3.3.1	Asymptotische Methode ($\eta = \eta(T)$)	48
3.3.2	Kombinierte Methode ($\rho, \eta, \lambda, c_p = f(T)$)	53
3.3.3	Vergleich mit anderen Arbeiten	55
3.4	Zusammenfassung	58
4	Stabilität der Strömung an der vertikalen beheizten Platte; stark gekoppeltes Problem	60
4.1	Vorbemerkungen	60
4.2	Grundströmung	62
4.2.1	Asymptotische Entwicklung	64
4.3	Lokale parallele Stabilitätsanalyse der Strömung an der senkrech- ten beheizten Platte	68
4.4	Nichlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der Grenzschicht- strömung an der vertikalen beheizten Platte	82
4.4.1	Lokale Lösungen	83
4.4.2	Lösung der vollständigen PSE-Gleichungen	87
4.5	Zusammenfassung	92
5	Die Stabilität der Grenzschicht mit Druckgradient; schwach gekoppeltes Problem	94
5.1	Vorbemerkungen	94
5.2	Grundströmung	96

5.3	Lokale parallele Stabilitätsanalyse der Grenzschichtströmung mit Druckgradient und Wärmeübergang	100
5.3.1	Spezialfall: Ebene Platte ($\partial p / \partial x = 0$)	106
5.4	Nichtlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte mit Wärmeübergang	110
5.5	Zusammenfassung	115
6	Thermische Rezeptivität: Wie entstehen Temperaturschwankungen ?	117
6.1	Vorbemerkungen	117
6.2	Einfluß der Temperaturschwankungen auf die Stabilität der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte	119
6.3	Entwicklung von Temperaturschwankungen in der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte	120
6.4	Zusammenfassung	125
7	Gesamtzusammenfassung und Diskussion	126
A	Lösbarkeitsbedingung für die Stabilitätsgleichungen erster und höherer Ordnungen	135
B	Numerische Aspekte der Lösungsverfahren	137
B.1	Grenzschichtgleichungen	137
B.2	Stabilitätsgleichungen bei lokaler paralleler Stabilitätsanalyse . .	137
B.2.1	Tschebyscheff-Kollokationsmethode	137
B.2.2	Einschußverfahren	139

B.3	Stabilitätsgleichungen bei nichlokaler nichtparalleler Stabilitätsanalyse (PSE-Gleichungen)	140
B.4	Implementierung	143
B.4.1	Diskretisierung	143
B.4.2	Programmeigenschaften	148

Literaturverzeichnis	149
-----------------------------	------------

Formelzeichen und Indizes

Lateinische Symbole

a^*	physikalische Größe
a^*	Stoffwert
a^*	Temperaturleitfähigkeit
\hat{a}	komplexe Variable
A^*	physikalische Größe
A, A_0	Amplitude der Störbewegung
$A_\rho, A_\eta, A_c, \dots$	Einflußfunktionen
b	abhängige Größe
\vec{b}, \vec{c}	Vektoren
$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots$	Einträge der Spaltenvektoren
C	Konstante
c_p^*	isobare spezifische Wärmekapazität
\hat{c}	Parameter der Stördifferentialgleichungen
$\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots$	komplexe Koeffizienten
e	Exponent der Wandtemperaturverteilung
\vec{e}	Einheitsvektor
Ec	Eckert-Zahl
$\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$	Differentialoperatoren der Energiegleichung
E_1	Differentialoperator der Energiegleichung 1. Ordnung
f^*	Frequenz
f	normierte Stromfunktion, Funktion
F	dimensionslose Frequenz
Fr	Froude-Zahl

g^*	Erdbeschleunigung
\vec{g}^*	Beschleunigungsvektor
Gr	Grashof–Zahl
h^*, H^*	Fluidschichthöhe
h	Funktion
$Im(\dots)$	Imaginärteil
k^*, k_x^*, k_y^*	Wellenzahl, Wellenzahlkomponenten der Störbewegung
K	Konstante
$K_\rho, K_\eta, K_c, \dots$	dimensionslose Stoffkennzahlen
K_{aT}, K_{aP}	dimensionslose Stoffkennzahlen
K_1, K_2, \dots	Kennzahlen
$\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots$	Differentialoperatoren der Kontinuitätsgleichung
l^*, L^*	charakteristische Länge
L_x, L_y	charakteristische Strecken
L_b^*, L_B^*	Bezugslängen
L_1	Differentialoperator der Impulsgleichung 1. Ordnung
$\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$	Differentialoperatoren der Impulsgleichung
m	Exponent der Normierungsfunktion
n	Ordnung
N	N–Faktor
\mathcal{O}, o	Größenordnungssymbole
p^*, P^*	Druck
p_B^*	Druck im Bezugszustand
Pe	Peclet–Zahl
p_m^*	modifizierter Druck
Pr	Prandtl–Zahl
q^*	Wärmestromdichte
r	Exponent der Wandtemperaturverteilung
$\vec{\hat{R}}$	komplexer Vektor
Ra	Rayleigh–Zahl
Ra_1, Ra_2, \dots	Einflußfunktionen

Re	Reynolds-Zahl
$Real(\dots)$	Realteil
S_η^*, S_λ^*	Sutherland Konstanten
St	Stanton-Zahl
t^*	Zeit
T^*	Temperatur
T_{film}	Filmtemperatur
$T_B^*, \Delta_B T^*$	Bezugstemperatur, -differenz
$T_n(y)$	Tschebyscheff-Polynom
u^*, v^*, w^*	Geschwindigkeitskomponenten
U^*	Geschwindigkeit
\vec{U}^*	Geschwindigkeitsvektor
$U_B^*, U_b^*, \tilde{U}_B^*$	Bezugsgeschwindigkeit
U_∞^*	Anströmgeschwindigkeit
x^*, y^*, z^*	kartesische Koordinaten
\vec{x}	Vektor
$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$	Einträge des Spaltenvektors

Griechische Symbole

$\hat{\alpha}$	komplexer Stabilitätsparameter
$\hat{\underline{\alpha}}$	zusammengesetzter Stabilitätsparameter bei PSE-Analyse
β	Keilwinkel
β^*	isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient
γ	Steigung von $\eta(T)$
δ^*	Grenzschichtdicke
Δ	Differenz
ε	Störparameter, Skalenparameter
ε	Wärmeübertragungsparameter, Heizrate
η	gestreckte Grenzschichtkoordinate

η_s	Ähnlichkeitskoordinate
η^*	dynamische Viskosität
Θ	dimensionslose Temperaturdifferenz
ν^*	kinematische Viskosität
λ^*	Wärmeleitfähigkeit
λ^*	Wellenlänge
ω^*	Frequenz der Störbewegung
φ^*	Stromfunktion der Störbewegung (Orr–Sommerfeld–Gleichungen)
Ψ	Stromfunktion
$\vec{\Psi}$	Vektor (PSE–Gleichungen)
ρ^*	Dichte
σ^*	Stabilitätsparameter des Rayleigh–Bénard Problems
τ_{ij}^*	Schubspannungstensor
ξ	Koordinate

Indizes

b, B	Bezugszustand
$film$	bei Filmtemperatur
i	Imaginärteil
i	laufender Index
ij	Indizes bei der Summenkonvention
$i1, i2$	1. und 2. Lösung der lokalen Lösungen
j	Index bei der Darstellung finiter Differenzen, laufender Index
$kr, krit$	kritisch
$krit, 0$	kritisch und konstante Stoffwerte
m	modifiziert
n	n. Ableitung
r	Realteil

st	statisch
$trans$	Transitionsbeginn
T	transponiert
w	Wand
wo	obere Wand
wu	untere Wand
$0, 1, \dots$	Ordnungen der asymptotischen Entwicklung
$0, 1, \dots$	Index der Differentialoperatoren
0	fester Ort
1	1. Ableitung der Eigenfunktion in x -Richtung
$i1\rho, i1\eta$	Anteil der mittleren Bewegung
$i2\rho, i2\eta$	Anteil der Schwankungsbewegung
∞	Zustand der homogenen Anströmung
$\hat{}$	dimensionslose Koordinaten bei PSE-Analyse
$\hat{}$	komplexe Größe
$\hat{}$	konjugiert komplexe Größe
$'$	Störgröße
$'$	Ableitung nach y, z, \dots
$-$	mittlere Größe
\sim	mit Stoffwerten bei Filmtemperatur gebildete Kennzahlen
\sim	mit l_b^* entdimensionierte Größen
$*$	dimensionsbehaftete Größe
ρ, η, c, \dots	Stoffwerte

Mathematische Symbole

$\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{U}, \mathbf{L}, \mathbf{T}_N, \hat{\mathbf{D}}$	Matrizen
Δ	Differenz
$\frac{D}{Dt^*}$	totales Differential

$$\frac{\partial}{\partial x^*}$$

partielle Ableitung nach x^*

$$\nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

Nabla-Operator, kartesisch

$$\nabla^{*2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right)$$

Laplace-Operator, kartesisch

$$\text{grad } p^* = \nabla^* p^*$$

Gradient von p^*

$$\text{div } \vec{U}^* = \nabla^* \cdot \vec{U}^*$$

Divergenz von \vec{U}^*

$$\text{rot } \vec{U}^* = \nabla^* \times \vec{U}^*$$

Rotation von \vec{U}^*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Kronecker-Symbol

$$[\dots]^T, \{\dots\}^T$$

transponierte Matrix, transponierter Vektor

1 Einleitung

Im täglichen Leben treffen wir eine Fülle von physikalischen Phänomenen an, die durch wissenschaftliche Theorien beschrieben werden. Strömungsmechanische Vorgänge werden durch die **Navier–Stokes–Gleichungen** beschrieben. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und der Energiegleichung bilden sie das Basismodell für die Beschreibung nahezu aller real existierenden Strömungen. Es kann jedoch nicht behauptet werden, daß diese Theorie richtig oder falsch ist. Es ist vielmehr so, daß eine Theorie als "brauchbar" angesehen wird, wenn sie sich in möglichst vielen Fällen bewährt hat, bzw. eine Vielzahl von Falsifizierungsversuchen fehlgeschlagen ist (Popper 1994).

Die genannten Gleichungen sind in diesem Sinne als Basismodell zur Untersuchung physikalischer Vorgänge in Strömungen mit Wärmeübergang geeignet. Mittels dieser Gleichungen kann jede beliebige Strömung beschrieben werden. Da der Anzahl der Strömungssituationen wie auch der Komplexität der Strömungen kaum Grenzen gesetzt sind, ist es mitunter sehr schwierig, das vollständige Modell einzusetzen und zu lösen. Gerade in der letzten Zeit sind jedoch durch die hohe Zunahme an Rechenleistung und Speicherverfügbarkeit bei Microcomputern immer wieder erfolgreiche Versuche unternommen worden, eine Lösung der vollständigen Gleichungen für einige wenige Spezialfälle zu berechnen. Diese sogenannten **direkten numerischen Simulationen (DNS)** sind mit einigen schwerwiegenden Nachteilen verbunden.

(1) Hoher Aufwand

Aufgrund der Komplexität der Gleichungen können Lösungen häufig nur mit einem immensen Aufwand an Rechenleistung und den damit verbundenen hohen Kosten erhalten werden.

(2) **Keine Allgemeingültigkeit**

Da zur Lösung der Gleichungen alle Parameter des Systems festgelegt werden müssen, sind Ergebnisse immer nur für den berechneten Spezialfall gültig. Sichere Vorhersagen für andere Fälle sind nur durch eine vollständig neue Berechnung möglich.

(3) **Fehlende Einsicht in physikalische Effekte**

Das zugrundeliegende Gleichungssystem enthält alle physikalischen Effekte. Es ist daher nicht möglich, die verschiedenen Auswirkungen der Effekte in den Ergebnissen den entsprechenden physikalischen Vorgängen zuzuordnen.

Diesen Nachteilen steht natürlich entgegen, daß eine solche direkte numerische Simulation in bestimmten Fällen ein sehr genaues Abbild der physikalischen Realität liefern kann. So können z.B. finanzielle Aufwendungen für komplexe experimentelle Untersuchungen vermieden oder gezielter eingesetzt werden. Für eine quantitative Analyse verschiedener strömungsmechanischer Vorgänge, wie sie in der Industrie gefordert ist, werden daher zunehmend komplexe Programmpakete benutzt, die nahezu eine vollständige Lösung des Basismodells ermöglichen.

Um den physikalischen Hintergrund in strömungsmechanischen Systemen besser zu verstehen, sind jedoch immer wieder einfachere Theorien aus dem Basismodell abgeleitet worden. Sie liegen in Form **rationaler Modelle** vor, die aus der systematischen Vernachlässigung spezieller physikalischer Effekte im Basismodell resultieren (Reduktion des Basismodells). Eine unsystematische Reduktion des Basismodells führt hingegen zu einem **nicht rationalen Modell**.

Gute Übereinstimmung der Ergebnisse aus rationalen Modellen mit der physikalischen Realität sind immer dann zu erwarten, wenn die vernachlässigten Effekte eine untergeordnete Rolle spielen. D.h., sie sind für den betrachteten Parameterbereich näherungsweise vernachlässigbar. Rationale Modelle sind in der Strömungsmechanik in der jüngeren Vergangenheit durch die Anwendung der

Mathematik asymptotischer Entwicklungen hergeleitet worden (Nayfeh (1981), Gersten und Herwig (1992)). Dabei wird davon ausgegangen, daß das mathematische Basismodell durch die Grenzwertbildung für einen bestimmten Parameter (Kennzahl) vereinfacht werden kann. Der Grenzübergang entspricht dann der vollständigen Vernachlässigung eines bestimmten physikalischen Effektes. In vielen Fällen tauchen in der Realität gerade solche Strömungen auf, in denen eine Kennzahl sehr groß oder sehr klein ist. Diese Strömungen lassen sich dann besonders gut durch asymptotische Grenzlösungen beschreiben (z.B. Prandtl'sche Grenzschichttheorie).

Eine sogenannte **Störungsrechnung**, bei der der entsprechende Parameter als Störparameter angenommen wird, kann dann eingesetzt werden, um den Fehler, der durch Vernachlässigung des physikalischen Effektes in dem Modell entsteht, systematisch zu untersuchen. Die Vorteile einer solchen Vorgehensweise sind offensichtlich.

(1) **Einsicht in physikalische Effekte und Struktur**

Durch die Verwendung asymptotischer Grenzlösungen, gekoppelt mit einer Störungsrechnung mit verschiedenen Parametern, können alle physikalischen Effekte separat untersucht werden. Eine asymptotische Entwicklung ist immer an die physikalische Struktur (Skalierung) des Systems gekoppelt, und läßt daher einen tieferen Einblick in die Strukturen eines Systems zu (z.B. Schichtencharakter bei der Umströmung eines Körpers).

(2) **Geringerer Lösungsaufwand**

Im Gegensatz zu den vollständigen Gleichungen sind die asymptotischen Entwicklungen in den meisten Fällen weniger komplex und daher einfacher zu lösen. In einigen Fällen kann ein mehrdimensionales Problem sogar auf ein ein- oder zweidimensionales Problem reduziert werden (z.B. selbstähnliche Strömungen).

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zum besseren Verständnis des Stabilitätsverhaltens von Strömungen mit Wärmeübergang geleistet werden.

Die Untersuchungen basieren auf rationalen Modellen, welche in Kapitel 2 aus dem oben erwähnten Basismodell abgeleitet werden. Diese rationalen Modelle werden dann für verschiedene Strömungstypen einer Störungsrechnung bezüglich des Einflusses temperaturabhängiger Stoffwerte unterzogen. Als sinnvoller Störparameter kann eine Heizrate $\varepsilon = \Delta_B T^* / T_B^*$ identifiziert werden. Die Störungsrechnung führt auf allgemeingültige Gleichungen für die verschiedenen Einflüsse der Stoffwerte auf die Stabilität der jeweiligen Strömung. Die Lösung der Gleichungen können als allgemeingültige Beziehungen dargestellt werden, in denen die einzelnen Effekte in Form von sogenannten **Einflußfunktionen** auftauchen. Diese Vorgehensweise gewährleistet zum einen eine maximale Allgemeingültigkeit sowie Einsichtigkeit in die physikalischen Vorgänge und zum anderen einen reduzierten Aufwand an Rechenleistung.

Die einzelnen Einflüsse, die ein Temperaturfeld auf die Stabilität von Strömungen hat, können mitunter sehr unterschiedlich und vom Strömungstyp abhängig sein. Eine Beurteilung der Effekte ist daher nur durch die Gegenüberstellung verschiedener Strömungstypen sinnvoll. Deshalb sind in dieser Arbeit drei unterschiedliche Strömungstypen untersucht worden.

In Kapitel 3 wird die Stabilität der horizontalen beheizten Fluidschicht (Rayleigh–Bénard–Konvektion) mit variablen Stoffwerten behandelt. In diesem Kapitel ist die angewandte Methodik zum besseren Verständnis etwas ausführlicher beschrieben. Als rationales Modell für die Stabilitätsanalyse werden hier die linearen Stördifferentialgleichungen mit einem zeitabhängigen Störwellenansatz verwendet.

Kapitel 4 befaßt sich mit einer weiteren natürlichen Konvektionsströmung, der Strömung an einer vertikalen beheizten Platte. Auch hier werden alle Stoffwerteffekte mit einer Störungsrechnung untersucht. Es werden zwei mathematische Modelle zur Berechnung des Stabilitätsverhaltens angewandt, die PSE–Gleichungen und die erweiterten Orr–Sommerfeld–Gleichungen. Beiden liegt ein räumlicher Störwellenansatz zugrunde (s. Kapitel 2).

Im 5. Kapitel wird dann eine erzwungene Konvektionsströmung, die Grenzschichtströmung mit Druckgradient und Wärmeübergang besprochen. Analog zu Kapitel 4 werden hier sowohl die PSE-Gleichungen als auch die erweiterten Orr–Sommerfeld-Gleichungen für eine lineare räumliche Stabilitätsanalyse eingesetzt. Dabei werden am Spezialfall der ebenen Platte die Unterschiede zwischen Ergebnissen der PSE-Gleichungen und Ergebnissen aus den erweiterten Orr–Sommerfeld-Gleichungen in Bezug auf die Stoffwerteffekte geklärt.

Kapitel 6 befaßt sich mit den Effekten, die durch Temperaturfluktuationen entstehen. Es wird erörtert, in welchem Zusammenhang eine Vernachlässigung dieser Effekte gerechtfertigt ist, und inwieweit die Annahme eines vollausgebildeten Störtemperaturfeldes bei der Stabilitätsanalyse von Strömungen mit Wärmeübergang der Realität entspricht.

Alle Ergebnisse sind im Sinne der durchgeführten Störungsrechnungen als exakte Lösungen der rationalen Modelle für $\varepsilon = 0$ und als Näherungslösungen für endliche Werte von ε anzusehen. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate und eine abschließende Diskussion erfolgt in Kapitel 7.

2 Grundlagen

2.1 Vorbemerkungen

Da es unmöglich ist, alle Methoden, Vorgehensweisen und Ergebnisse der Stabilitätstheorie im Rahmen der vorliegenden Arbeit erschöpfend darzustellen, soll eine kurze begriffliche Einordnung helfen, die Zusammenhänge zu verstehen.

Die Stabilitätstheorie der Laminarströmungen hat ihren Ursprung schon im letzten Jahrhundert. Die mathematische Formulierung der bis heute erfolgreichsten Theorie beruht auf der Methode der kleinen Schwingungen und führte erstmals 1930 durch L. Prandtl zu Ergebnissen. Einer stationären Grundströmung $\vec{U}(x, y, z)$ wird hierbei eine zeitlich veränderliche Störbewegung $\vec{U}'(x, y, z, t)$ superponiert (s. unten). Die als infinitesimal klein angenommene Störbewegung wird nun auf ihr Verhalten bei verschiedenen Parametern des Systems (Frequenz der Störbewegung, Reynolds-, Grashof-, oder Rayleigh-Zahl) untersucht. Als **stabil** werden Strömungen bezeichnet, in denen (kleine) Störungen gedämpft werden. Angefachte Störungen lassen hingegen auf eine **instabile** Strömung schließen. Eine **indifferente** Störung wird weder gedämpft noch angefacht. Sie wird auch als **neutrale** Störung bezeichnet. Die Kurve eines Stabilitätsdiagramms, auf der alle neutralen Zustände eines Systems liegen, heißt demnach neutrale Kurve oder **Indifferenzkurve**. Das Minimum einer solchen Kurve bildet der **Indifferenzpunkt** oder **kritische Punkt** (K_{krit}). Jenseits dieses Punktes befinden sich, eingeschlossen von der neutralen Kurve, alle instabilen Zustände eines Systems (Strömung), außerhalb davon alle stabilen Zustände.

Inzwischen sind die Untersuchungen zur Stabilität laminarer Strömungen fortgeschritten, und es sind vielfache Erweiterungen dieser einfachen Theorie entwickelt worden. Daher ist der Begriff der hydrodynamischen Stabilität/Instabilität nun auch sehr stark unterteilt worden. Instabilitäten, die in Strömungen auftreten, welche nicht ihrerseits schon aus einer Instabilität eines inertialen Grundzustandes hervorgegangen sind, nennt man **primäre Instabilitäten**. Wird ein instabiler Grundzustand durch Überlagerung einer Störgröße in einen anderen, stabilen oder instabilen Zustand überführt, so kann dieser durch Überlagerung einer weiteren Störbewegung gleicher oder anderer Art destabilisiert werden. Diese Instabilität wird dann **sekundäre Instabilität** genannt. Während primäre Instabilitäten in Form von Störbewegungen auftreten, die dem Grundzustand überlagert sind und ihre Energie direkt dem Grundzustand entziehen, sind sekundäre Instabilitäten auf das Vorhandensein der primären Störungen "angewiesen". Sie benutzen die primären Störungen sozusagen als Katalysator zur Energieaufnahme aus dem Grundzustand.

Eine weitere Unterscheidung trifft man zwischen **Scherströmungsinstabilität** und **Schichteninstabilität**. Letztere tritt z.B. bei der Rayleigh–Bénard Konvektion auf. Hierbei wird eine horizontale Fluidschicht unter Schwerkrafteinfluß von unten beheizt. Der über die Fluidschicht auftretende Temperaturgradient resultiert in einer instabilen Schichtstruktur, bei der schweres kaltes Fluid über leichtem warmem Fluid geschichtet ist. Bei Überschreitung einer bestimmten Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Schicht kommt das Fluid "plötzlich" in Bewegung, und es bildet sich eine Zellstruktur aus (s. Kapitel 3). Weitere Schichtströmungsinstabilitäten treten bei der Taylor–Couette–Strömung und bei der Zellularkonvektion als Folge von Konzentrationsschichtungen auf.

Scherströmungsinstabilitäten trifft man vor allem bei erzwungener Konvektion, wie z.B. der Rohrströmung und der Grenzschichtströmung an. Anders als bei der Schichteninstabilität erfolgt der Übergang dieser Strömungstypen in einen anderen Zustand bei Einsetzen der Instabilität nicht "plötzlich", sondern erst

ganz allmählich. Der Übergang wird hier **Transition** genannt und bezeichnet den komplexen Vorgang der Entwicklung einer laminaren Strömung bis hin zur vollturbulenten Strömung. Abbildung 2.1 stellt schematisch diesen Vorgang für eine Plattengrenzschicht dar. Wenn in der Literatur fälschlicherweise von **Umschlag** (laminar/turbulent) gesprochen wird, so ist damit immer der gesamte Bereich der Umbildung einer Strömung vom Laminaren zum Turbulenten gemeint.

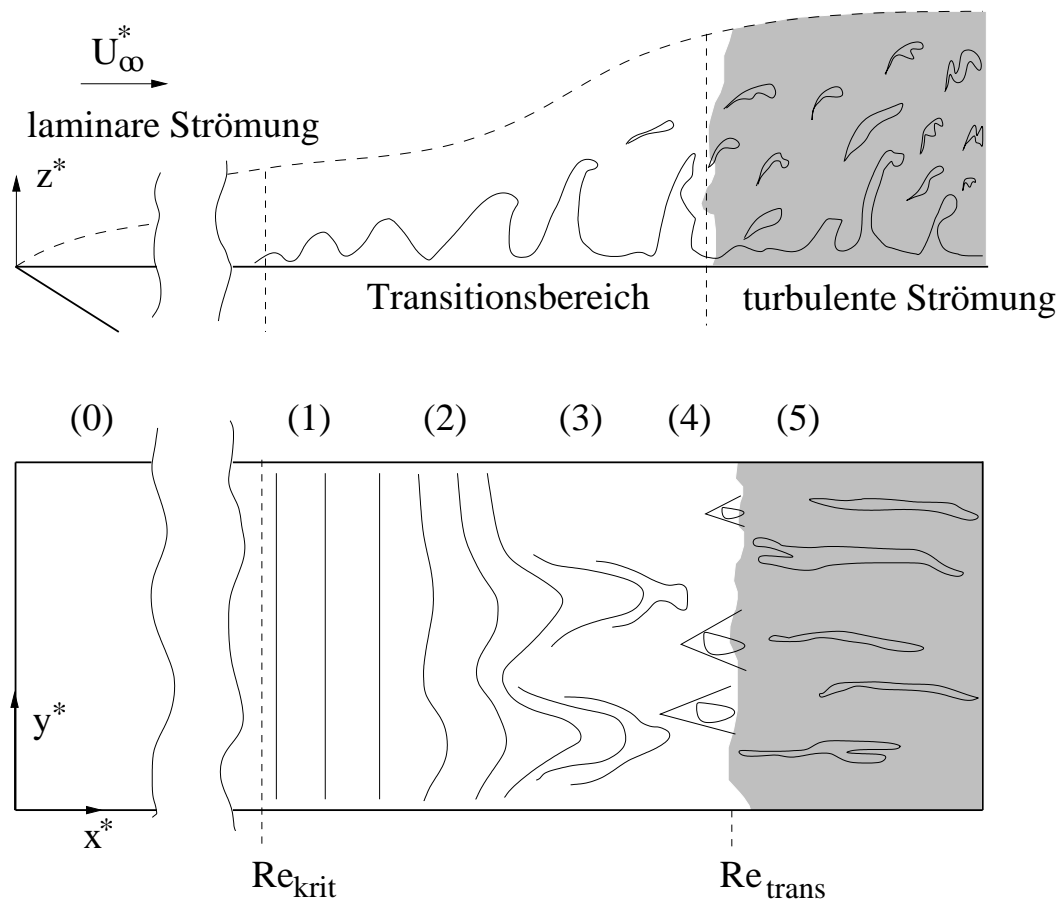


Abb. 2.1 : Schematische Darstellung des Transitionsprozesses

Abbildung 2.1 zeigt eine in der Aufsicht und Seitenansicht skizzierte Platte, die von der linken Seite her mit der Geschwindigkeit U_∞^* überströmt wird. In der sich zunächst ausbildenden laminaren Grenzschicht (0) werden nach Erreichen einer kritischen Reynolds-Zahl Re_{krit} wellenförmige, primäre Störungen (Tollmien-Schlichting-Wellen) beobachtet, deren Amplituden stromab anwachsen. Durch das Anwachsen dieser primären Störungen wird die Strömung

instabil gegenüber dreidimensionalen sekundären Störungen (2). Diese bilden dann durch Überlagerung dreidimensionale Strukturen, die sogenannten Λ -Wirbel (3). Ein darauf folgender Zerfall dieser Strukturen und das räumlich sowie zeitlich unregelmäßige Auftreten von stetig anwachsenden Turbulenzflecken (4) (engl.: **turbulent spots**) beenden schließlich den Transitionsvorgang (Re_{trans}). Ein Merkmal des nun folgenden vollturbulenten Bereichs (5) sind kleinere langgezogene Gebiete, in denen eine verminderte Stromabkomponente der Geschwindigkeit festgestellt werden kann (engl.: **streaks**).

Zur Modellierung all dieser komplexen Vorgänge sind entsprechend komplexe Theorien entwickelt worden, die bis heute jedoch noch keine genaue Aussage über den Transitionsvorgang zulassen. Dennoch sind viele dieser Theorien geeignet, einen tieferen Einblick in den Ablauf des Transitionsprozesses zu gewinnen.

In der praktischen Anwendung wird jedoch immer noch auf möglichst einfache Methoden zurückgegriffen, welche eine schnelle und einfache Aussage über den Zustand der gerade untersuchten Strömung ohne großes Detailwissen zulassen. Eine solche recht einfache Methode ist die sogenannte **e^N -Methode**, die folgendes besagt: Der Transitionsvorgang ist abgeschlossen, sobald das Verhältnis von anwachsender zu anfänglicher Amplitude der Störbewegung den Wert e^N erreicht. Der Wert der Zahl N muß jedoch, empirisch bestimmt, für den zu untersuchenden Strömungstyp vorliegen (s. z.B. Arnal (1984)).

Die e^N -Methode basiert auf der räumlichen Stabilitätsanalyse (engl.: **spatial mode analysis**) welche die räumliche Entwicklung der Störgrößen analysiert. Im Gegensatz dazu wird bei einer zeitlichen Stabilitätsanalyse (engl.: **time mode analysis**) die zeitliche Entwicklung einer Störbewegung an einer bestimmten Stelle beobachtet. Es hat sich herausgestellt, daß beide Methoden nicht auf beliebige Instabilitätsformen mit Erfolg anwendbar sind. Vielmehr ist es nötig, zwischen **konvektiver Instabilität** und **absoluter Instabilität** zu unterscheiden.

Eine Strömung heißt konvektiv instabil, wenn eine in die Strömung eingebrachte

Störung angefacht wird, jedoch für alle Zeiten den Ort der Entstehung verläßt und diesen daher nicht mehr beeinflußt. Eine solche Strömung ist z.B. die Grenzschichtströmung über einer ebenen Platte. Im Gegensatz dazu werden Strömungen, bei denen eine entsprechende Störung auf Dauer am Ort der Entstehung verweilt, absolut instabil genannt (Drazin und Reid (1981), Huerre und Monkewitz (1990)).

Für den erstgenannten Typ von Strömungen erwartet man immer eine räumliche Entwicklung der Störgrößen. In diesem Fall existiert ein örtlich festgelegter Indifferenzpunkt, von dem aus stromab der Übergang laminar/turbulent eingeleitet wird (s. Bild 2.1). Eine theoretische Untersuchung, basierend auf der räumlichen Stabilitätsanalyse, ist hier gerechtfertigt. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, als "auf der Strömung mitreisender" Beobachter eine zeitliche Analyse durchzuführen (s. Kapitel 2.2.3). Dieser Ansatz ist in jedem Fall einfacher. Die Ergebnisse lassen sich jedoch nur über eine entsprechende Umrechnung (**Gaster Transformation**) mit experimentellen Ergebnissen bzw. denen der räumlichen Analyse vergleichen.

Bei Vorliegen absoluter Instabilität hingegen entwickeln sich die Störungen räumlich wie zeitlich gleichermaßen. Es wird also ein Anwachsen der Instabilität am Ort der Entstehung zu verzeichnen sein. Der Transitionsvorgang solcher Strömungen vollzieht sich plötzlich, der Begriff Umschlag ist hier treffender. Die Rayleigh-Bénard-Konvektion, oder die Nachlaufströmung hinter einem Zylinder sind typische Vertreter dieses Typs.

Die Vielzahl der erwähnten Ausdrücke sind Folge der immer besseren Kenntnis der physikalischen Vorgänge, die sich z.B. in einer laminaren Grenzschicht im Transitionsbereich abspielen. Eine ausführliche Erläuterung dieser Begriffe findet sich u.a. in Oertel und Delfs (1996) oder Schlichting und Gersten (1997).

In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluß der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen erörtert werden. Um die verschiedenen Aspekte dieses Einflusses erfassen zu können, werden sowohl Strömungen bei natürlicher Kon-

vektion als auch bei erzwungener Konvektion untersucht. Desweiteren wird eine Unterteilung in Scherströmungsinstabilitäten (erzwungene Konvektion an der horizontalen ebenen Platte, freie Konvektion an der vertikalen beheizten Platte) und Schichteninstabilitäten (Rayleigh–Bénard Konvektion) vorgenommen.

Die Beeinflussung der Stabilität einer Strömung durch ein Temperaturfeld ist nur über die beteiligten Stoffwerte möglich. Diese sind in einer realen Strömung immer temperatur- und druckabhängig. Besonderes Augenmerk wird in dieser Arbeit auf die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte gelegt. Eine asymptotische Entwicklung der Stoffgrößen nach der Temperatur und eine entsprechende Entwicklung aller abhängigen Größen in dem jeweiligen Problem, soll zu Ergebnissen führen, die es erlauben, mehr Einblick in die verschiedenen Beeinflussungsmechanismen zu gewinnen und die verschiedenen Effekte sauber voneinander zu trennen. Zunächst sollen jedoch die mathematischen Modelle zur Beschreibung der unterschiedlichen physikalischen Systeme im anschließenden Kapitel vorgestellt werden.

2.2 Grundgleichungen

Die theoretische Analyse der Stabilität von Strömungen unter dem Einfluß eines Temperaturfeldes erfordert die Formulierung eines geeigneten mathematischen Modells. Ausgangspunkt dieser Formulierung sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zusammen mit der Stokes'schen Hypothese, dem Newtonschen Reibungsgesetz und dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz. Im allgemeinen Fall (dreidimensional, variable Stoffwerte) lauten sie (White (1974)):

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{U}^*) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho^* \frac{D\vec{U}^*}{Dt^*} = (\rho^* - \rho_{st}^*) \vec{g}^* - \nabla^* p_m^* + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\eta^* \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \eta^* \nabla^* \cdot \vec{U}^* \right] \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \rho^* c_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} = & \beta^* T^* \frac{Dp^*}{Dt^*} + \nabla^* \cdot (\lambda^* \nabla^* T^*) \\ & + \left[\eta^* \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \eta^* \nabla^* \cdot \vec{U}^* \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Gleichungen (2.1)–(2.3) stellen, ergänzt um die entsprechenden Stoffgesetzen, das mathematische Basismodell zur Beschreibung aller Strömungen Newtonscher Fluide mit Impuls- und Wärmeübertragung dar. Aus wissenschaftstheoretischer Sicht (Popper (1994)) gilt dieses Modell als bewährt. Das Modell hat sich also in allen Situationen, in denen es bisher zum Einsatz gekommen ist, als "brauchbar" erwiesen und wird daher auch kaum angezweifelt.

Die Gleichungen (2.1)–(2.3) sollen im folgenden als die "allgemeinen Grundgleichungen" bezeichnet werden, aus denen dann systematisch die rationalen Modelle zur Beschreibung des Stabilitätsverhaltens der verschiedenen Strömungen hergeleitet werden.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, daß der in der Impulsgleichung (2.2) auftretende modifizierte Druck p_m^* nicht identisch mit dem Druck p^* in der thermischen Energiegleichung (2.3) ist, sondern dem Differenzdruck zwischen statischem und Gesamtdruck, also dem dynamischen Druck entspricht. Diese Tatsache ist jedoch nur von Bedeutung, wenn die Druckabhängigkeit der Stoffwerte berücksichtigt werden muß, was in der Regel jedoch nicht der Fall ist und hier nicht Gegenstand der Untersuchungen sein soll.

2.2.1 Lineare Stördifferentialgleichungen

Im nächsten Schritt werden die Gleichungen (2.1)–(2.3) entdimensioniert, und es werden anschließend die linearen Stördifferentialgleichungen hergeleitet. Als Bezugsgrößen dienen die Bezugslänge L_B^* , die Geschwindigkeit U_B^* , die Temperaturdifferenz $\Delta_B T^*$, sowie alle Stoffwerte im Bezugspunkt ρ_B^* , η_B^* , c_{pB}^* , λ_B^* und die Erdbeschleunigung g^* . Die Aufspaltung aller abhängigen Größen in einen

Anteil $\bar{a}^*(x^*, y^*, z^*)$ für die mittlere Bewegung und einen Anteil $a^{*'}(x^*, y^*, z^*, t^*)$ für die überlagerte Störbewegung führt, unter Vernachlässigung der quadratischen Terme in $a^{*'}$ (lineare Theorie) und Subtraktion der die mittlere Bewegung beschreibenden Gleichungen, zu folgendem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \vec{U} + \bar{\rho} \vec{U}') = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \rho' \vec{U} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \vec{U}'}{\partial t} + \vec{U}' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \vec{U} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = & K_1 \rho' \vec{e} - \nabla p'_m \\ & + K_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta' \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{U} \right] \right\} \\ & + K_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\eta} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{U}' \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{c}_p \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \vec{U} \nabla \Theta' + \vec{U}' \nabla \bar{\Theta} \right) + (\rho' \bar{c}_p + \bar{\rho} c'_p) \vec{U} \nabla \bar{\Theta} = & K_3 \nabla \cdot (\lambda' \nabla \bar{\Theta} + \bar{\lambda} \nabla \Theta') \\ & + K_2^{-1} K_4 \left\{ [\beta' (\bar{\Theta} + \bar{\Theta}_B) + \bar{\beta} \Theta'] \frac{D \bar{p}}{Dt} + \bar{\beta} (\bar{\Theta} + \bar{\Theta}_B) \frac{D p'}{Dt} \right\} \\ & + K_4 \left\{ \eta' \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{U} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right. \\ & \quad \bar{\eta} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{U}' \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & \quad \left. \bar{\eta} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{U} \right] \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eine Übersicht über die dimensionslosen Größen gibt Tabelle 2.1. Die dimensionslosen Kennzahlen K_1 – K_4 sind

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{g^* L_B^*}{U_B^{*2}}, \quad K_2 = \frac{\eta_B^*}{\rho_B^* U_B^* L_B^*}, \quad K_3 = \frac{\lambda_B^* \eta_B^*}{\eta_B^* c_{pB}^* \rho_B^* U_B^* L_B^*}, \\ K_4 &= \frac{U_B^* \eta_B^*}{c_{pB}^* \Delta_B T^* \rho_B^* L_B^*}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.4)–(2.6) beschreiben das Verhalten von dreidimensionalen "kleinen" Störungen in dreidimensionalen Strömungsfeldern bei variablen Stoffwerten. Da hier noch keine Aussage über den zu untersuchenden Strömungstyp gemacht wurde, gelten diese Gleichungen für gemischte Konvektion sowie auch für die Grenzfälle der reinen natürlichen und der reinen erzwungenen Konvektion. Die Kennzahlen $K_1 - K_4$ sind historisch bedingt nach bekannten Forschern benannt und werden in der Literatur durch die Abkürzungen $K_1 = Fr^{-2}$, $K_2 = Re^{-1}$, $K_3 = Re^{-1}Pr^{-1}$ und $K_4 = EcRe^{-1}$ angegeben.

Tabelle 2.1: Dimensionslose Größen der Grundgleichungen

x_i	\bar{u}_i	u_i'	\bar{p}	p'	$\bar{\Theta}$	Θ'			
$\frac{x_i^*}{L_B}$	$\frac{\bar{u}_i^*}{U_B^*}$	$\frac{u_i^{*'}}{U_B^*}$	$\frac{\bar{p}^* - p_B^*}{\rho_B^* U_B^{*2}}$	$\frac{p^{*'}}{\rho_B^* U_B^{*2}}$	$\frac{\bar{T}^* - T_B^*}{\Delta_B T^*}$	$\frac{T^{*'}}{\Delta_B T^*}$			
$\bar{\rho}$	ρ'	$\bar{\eta}$	η'	\bar{c}_p	c_p'	$\bar{\lambda}$	λ'	$\bar{\beta}$	β'
$\frac{\bar{\rho}^*}{\rho_B^*}$	$\frac{\rho^{*'}}{\rho_B^*}$	$\frac{\bar{\eta}^*}{\eta_B^*}$	$\frac{\eta^{*'}}{\eta_B^*}$	$\frac{\bar{c}_p^*}{c_{pB}^*}$	$\frac{c_p^{*'}}{c_{pB}^*}$	$\frac{\bar{\lambda}^*}{\lambda_B^*}$	$\frac{\lambda^{*'}}{\lambda_B^*}$	$\bar{\beta}^* \Delta_B T^*$	$\beta^{*'} \Delta_B T^*$

Für die im folgenden angestrebten Untersuchungen ist die mathematische Basis durch das Modell (2.4)–(2.6) vollständig beschrieben und braucht in den speziellen Fällen nur noch angepaßt zu werden.

Anmerkung: In dieser Arbeit wird nicht auf Dissipationseffekte eingegangen ($Ec \rightarrow 0$) (s. Kapitel 2.3.2).

2.2.2 Parabolische Stabilitätsgleichungen für Grenzschichtströmungen (PSE-Gleichungen)

Bei der Untersuchung von Grenzschichten hinsichtlich ihrer Stabilität wird davon ausgegangen, daß sich die Strömungsgrößen in Strömungsrichtung nur wenig ändern, während quer zur Strömungsrichtung starke Änderungen auftreten. Diese Annahme führt auf die sogenannten PSE-Gleichungen (Bertolotti (1991)). Sie stellen ein rationales Modell zur Beschreibung der Entwicklung

von Störungen dar und lassen sich aus den Stördifferentialgleichungen mittels der **Methode der multiplen Skalen** (engl: multiple scale analysis) ableiten.

Es sei x die Hauptströmungsrichtung und y die dazu senkrechte Richtung (2D-Strömung). Eine betragsgleiche Änderung einer Strömungsgröße (zB. \bar{u}) benötigt in x -Richtung eine längere Strecke L_x als in y -Richtung L_y . Diese charakteristischen Strecken werden als Längenskalen bezeichnet. Man kann nun einen kleinen Parameter $\varepsilon = L_y/L_x$, den Skalenparameter, einführen. Mittels dieses Parameters wird der schwachen Abhängigkeit der Grenzschichtströmung von der x -Richtung formal durch die folgende Schreibweise Rechnung getragen:

$$\bar{u} = \bar{u}(\varepsilon x, y), \quad \bar{v} = \bar{v}(\varepsilon x, y), \quad \bar{p} = \bar{p}(\varepsilon x, y), \quad \bar{\Theta} = \bar{\Theta}(\varepsilon x, y). \quad (2.7)$$

Nach Einführung der neuen Variablen $\bar{x} = \varepsilon x$ lautet die Kontinuitätsgleichung im Fall konstanter Stoffwerte für die Grundströmung

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

Die Gleichung zeigt, daß die Normalenkomponente der Geschwindigkeit \bar{v} im Vergleich zur Parallelenkomponente \bar{u} um die Größenordnung ε kleiner ist. Ein Größenordnungsabgleich ergibt für den Geschwindigkeitsvektor $\vec{U} = \{\bar{u}, \varepsilon \bar{v}\}$.

Die Störbewegung ist jedoch im Gegensatz zur Grundströmung keineswegs nur schwach veränderlich in Hauptströmungsrichtung. Es ist vielmehr so, daß das Störgrößenproblem sowohl von einer kurzskaligen Variablen \tilde{x} als auch von der langskaligen Variablen \bar{x} abhängt. Formal wird daher die Störbewegung (hier: u') als $u'(x, y, t) = u'(\tilde{x}, \bar{x}, y, t)$ geschrieben, und es gelten die Beziehungen $\tilde{x} := x$ und $\bar{x} := \varepsilon x$. Ableitungen nach x ergeben dann

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}}. \quad (2.9)$$

Diese streng mathematische Formulierung des Problems bedeutet nichts anderes, als daß eine Störbewegung aus einem Anteil mit kurzskaligem Verhalten

und einem Anteil mit langskaligem Verhalten besteht. Eine sich räumlich entwickelnde 2D-Störwelle wird daher üblicherweise zu

$$u'(\tilde{x}, \bar{x}, y, t) = \hat{u}(\bar{x}, y) \exp \left(i \left[\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \hat{\alpha}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} - \omega t \right] \right) + c.c. \quad (2.10)$$

angesetzt. In Gleichung (2.10) stellt $\hat{u}(\bar{x}, y)$ die Amplitudenfunktion der Störungsbewegung dar. Der exponentielle Anteil beinhaltet den Stabilitätsparameter, dessen Realteil α_r die Wellenzahl der Störung ist. Der Imaginärteil α_i entscheidet über Anfachung ($\alpha_i < 0$) bzw. Dämpfung ($\alpha_i > 0$) der Störung. ω ist die dimensionslose Frequenz der Störung.

Mit der Formulierung (2.10) ergeben sich die Ableitungen der Störgrößen in x -Richtung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n u'}{\partial x^n} = & \left[(i\hat{\alpha})^n \hat{u} + \varepsilon \left(n (i\hat{\alpha})^{n-1} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{n}{2} (n-1) i^{n-1} \hat{\alpha}^{n-2} \frac{d\hat{\alpha}}{d\bar{x}} \hat{u} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \exp \left(i \left[\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \hat{\alpha}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} - \omega t \right] \right) + c.c.. \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.11) repräsentiert die PSE-Annahme P1 (engl: PSE=Parabolized Stability Equations) (Bertolotti (1991)):

(P1) Die Geschwindigkeitsprofile, Wellenlängen und Anfachungsraten sind schwach veränderliche Funktionen von x . Damit sind 2. Ableitungen und Produkte 1. Ableitungen dieser Funktionen nach x vernachlässigbar klein ($\mathcal{O}(\varepsilon^2)$).

Die zweite Annahme, welcher das hier präsentierte Modell unterliegt, schränkt den Anwendungsbereich auf konvektiv instabile Strömungen ein (s.o.). Sie zeigt sich in der Formulierung des Wellenansatzes (2.10) (räumliche Anfachung).

Mit dem Ansatz (2.10) erhält man unter Berücksichtigung von (2.11) aus den Stördifferentialgleichungen (2.4)–(2.6) für den zweidimensionalen Fall das folgende Gleichungssystem:

Kontinuitätsgleichung:

$$\{\mathcal{K}_0 + \varepsilon \mathcal{K}_1\} \vec{\Psi} + \varepsilon \mathcal{K}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (2.12)$$

$$\mathcal{K}_0 \vec{\Psi} := (i\hat{\alpha}\bar{u} - i\omega)\hat{\rho} + \bar{\rho}[i\hat{\alpha}\hat{u} + \hat{v}'] + \bar{\rho}'\hat{v}$$

$$\mathcal{K}_1 \vec{\Psi} := (\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}')\hat{\rho} + \bar{v}\hat{\rho}' + \bar{\rho}_{\bar{x}}\hat{u}$$

$$\mathcal{K}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} := \bar{u}\hat{\rho}_{\bar{x}} + \bar{\rho}\hat{u}_{\bar{x}}$$

Impulsgleichung:

$$\{\mathcal{M}_0 + \varepsilon \mathcal{M}_1\} \vec{\Psi} + \varepsilon \mathcal{M}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} + \varepsilon \mathcal{M}_3 \vec{\Psi} \hat{\alpha}_{\bar{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \vec{\Psi} := & \bar{\rho} \{ (i\hat{\alpha}\bar{u} - i\omega) [\hat{u}' - i\hat{\alpha}\hat{v}] + \bar{u}''\hat{v} + \bar{u}'(i\hat{\alpha}\hat{u} + \hat{v}') \} \\ & + \bar{\rho}' \{ (i\hat{\alpha}\bar{u} - i\omega) \hat{u} + \bar{u}'\hat{v} \} - K_1 \bar{\rho}' \\ & - K_2 \{ \bar{\eta} (\hat{u}''' - \hat{\alpha}^2 \hat{u}' - i\hat{\alpha}\hat{v}'' + i\hat{\alpha}^3 \hat{v}) + 2\bar{\eta}' (\hat{u}'' - \hat{\alpha}^2 \hat{u}) \\ & + \bar{\eta}'' (\hat{u}' + i\hat{\alpha}\hat{v}) + (\bar{u}''' + \hat{\alpha}^2 \bar{u}') \hat{\eta} + 2\bar{u}''\hat{\eta}' + \bar{u}'\hat{\eta}'' \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \vec{\Psi} := & \hat{\rho} \{ \bar{u}\bar{u}'_{\bar{x}} + \bar{u}'(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}') + \bar{v}\bar{u}'' \} + \hat{\rho}' \{ \bar{u}\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}\bar{u}' \} \\ & + \bar{\rho} \{ \bar{u}'_{\bar{x}}\hat{u} + \bar{v}(\hat{u}'' - i\hat{\alpha}\hat{v}') + (\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}') [\hat{u}' - i\hat{\alpha}\hat{v}] \} \\ & + \bar{\rho}' \{ \bar{u}_{\bar{x}}\hat{u} + \bar{v}\hat{u}' \} - 2K_2 \{ -\bar{\eta}_{\bar{x}}(\hat{v}'' - \hat{\alpha}^2 \hat{v}) + \bar{\eta}'_{\bar{x}}(i\hat{\alpha}\hat{u} - \hat{v}') \\ & + i\hat{\alpha}(\bar{u}_{\bar{x}} - \bar{v}')\hat{\eta}' - i\hat{\alpha}\bar{v}''\hat{\eta} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} := & \bar{\rho} \{ \bar{u}(\hat{u}'_{\bar{x}} - 2i\hat{\alpha}\hat{v}_{\bar{x}}) + i\omega\hat{v}_{\bar{x}} + \bar{u}'\hat{u}_{\bar{x}} \} + \bar{\rho}'\bar{u}\hat{u}_{\bar{x}} \\ & - K_2 \{ \bar{\eta}(2i\hat{\alpha}\hat{u}'_{\bar{x}} - \hat{v}_{\bar{x}}'' + 3\hat{\alpha}^2 \hat{v}_{\bar{x}}) + 4i\hat{\alpha}\bar{\eta}'\hat{u}_{\bar{x}} + \bar{\eta}''\hat{v}_{\bar{x}} - 2i\hat{\alpha}\bar{u}'\hat{\eta}_{\bar{x}} \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_3 \vec{\Psi} \hat{\alpha}_{\bar{x}} := -i \hat{\alpha}_{\bar{x}} \bar{\rho} \bar{u} \hat{v} - K_2 \{ \bar{\eta} (i \hat{\alpha}_{\bar{x}} \hat{u} - \hat{\alpha} \hat{\alpha}_{\bar{x}} \hat{v}') + 2i \hat{\alpha}_{\bar{x}} \bar{\eta}' \hat{u} - i \hat{\alpha}_{\bar{x}} \bar{u}' \hat{\eta} \}$$

Energiegleichung:

$$\{ \mathcal{E}_0 + \varepsilon \mathcal{E}_1 \} \vec{\Psi} + \varepsilon \mathcal{E}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} + \varepsilon \mathcal{E}_3 \vec{\Psi} \hat{\alpha}_{\bar{x}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 \vec{\Psi} &:= \bar{\rho} \bar{c}_p \left\{ (i \hat{\alpha} \bar{u} - i \omega) \hat{\Theta} + \bar{\Theta}' \hat{v} \right\} \\ &\quad - K_3 \left\{ \bar{\lambda} \left(\hat{\Theta}'' - \hat{\alpha}^2 \hat{\Theta} \right) + \bar{\lambda}' \hat{\Theta}' + \hat{\lambda} \bar{\Theta}'' + \hat{\lambda}' \bar{\Theta}' \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \vec{\Psi} &:= \bar{\rho} \bar{c}_p \left\{ \hat{u} \bar{\Theta}_{\bar{x}} + \bar{v} \hat{\Theta}' \right\} + (\bar{\rho} \bar{c}_p + \bar{\rho} \hat{c}_p) \left\{ \bar{u} \bar{\Theta}_{\bar{x}} + \bar{v} \bar{\Theta}' \right\} \\ &\quad - K_3 \left\{ i \hat{\alpha} \bar{\Theta}_{\bar{x}} \hat{\lambda} + i \hat{\alpha} \bar{\lambda}_{\bar{x}} \hat{\Theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_2 \vec{\Psi}_{\bar{x}} := \bar{\rho} \bar{c}_p \bar{u} \hat{\Theta}_{\bar{x}} - 2 K_3 i \hat{\alpha} \bar{\lambda} \hat{\Theta}_{\bar{x}}$$

$$\mathcal{E}_3 \vec{\Psi} \hat{\alpha}_{\bar{x}} := -K_3 i \hat{\alpha}_{\bar{x}} \bar{\lambda} \hat{\Theta}$$

Der Vektor $\vec{\Psi}$ ist $\vec{\Psi} = \left\{ \hat{u}, \hat{v}, \hat{\Theta}, \hat{\rho}, \hat{\eta}, \hat{\lambda}, \hat{c}_p \right\}^T$. Das System (2.12)–(2.14) stellt ein System parabolisierter Differentialgleichungen dar, dessen Lösung das Verhalten zweidimensionaler Störungen in einer zweidimensionalen Grenzschicht bei variablen Stoffwerten beschreibt.

Die Operatoren $\mathcal{K}_0, \mathcal{M}_0, \mathcal{E}_0$ sind die bekannten Orr–Sommerfeld–Operatoren (s.u.). Mit den Operatoren $\mathcal{K}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{E}_1$ wird der Einfluß der Nichtparallelität der Grundströmung auf die Störungsentwicklung beschrieben.

Die Analyse einer Strömung mittels des Modells (2.12)–(2.14) beginnt an einer räumlich beliebigen Stelle x_0 , die als Bezugsstelle (Entdimensionierung) dient. Von dieser Stelle aus wird das System (2.12)–(2.14) stromabwärts integriert.

Allgemeine Anfachungsrate und Wellenzahl lassen sich aus den Ergebnissen der Integration bestimmen. Die räumliche Änderung einer Störwelle bezogen auf ihre Größe ist durch den Ausdruck

$$\frac{1}{u'} \frac{\partial u'}{\partial x}$$

gegeben. Nach (2.10) und (2.11) gilt dann

$$\frac{1}{u'} \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{\hat{u}} \left[i \hat{\alpha} \hat{u} + \varepsilon \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \right]. \quad (2.15)$$

Die daraus resultierende physikalisch reale Anfachungsrate ($\underline{\alpha}_i = \text{Real}(\hat{\underline{\alpha}})$) setzt sich daher aus zwei Anteilen zusammen.

$$\text{Real}(\hat{\underline{\alpha}}) = \underline{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon \text{Real} \left(\frac{1}{\hat{u}(\bar{x}, y_{max})} \frac{\partial \hat{u}(\bar{x}, y_{max})}{\partial \bar{x}} \right) \quad (2.16)$$

Für die Wellenzahl ($\underline{\alpha}_r = \text{Im}(\hat{\underline{\alpha}})$) gilt entsprechendes.

$$\text{Im}(\hat{\underline{\alpha}}) = \underline{\alpha}_r = \alpha_r + \varepsilon \text{Im} \left(\frac{1}{\hat{u}(\bar{x}, y_{max})} \frac{\partial \hat{u}(\bar{x}, y_{max})}{\partial \bar{x}} \right) \quad (2.17)$$

Da die Anfachungsrate sowie auch die Wellenzahl der Störbewegung an jeder Stelle y der Grenzschicht anders sein kann, werden diese üblicherweise an der Stelle y_{max} bestimmt. An dieser Stelle ist der Betrag $|\hat{u}|$ der Amplitudenfunktion maximal.

Bei genauerer Betrachtung des Gleichungssystems (2.12)–(2.14) fällt auf, daß die Anzahl der zu bestimmenden Variablen (\hat{u} , \hat{v} , $\hat{\Theta}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\lambda}$, \hat{c}_p , $\hat{\alpha}$) sieben ist und die der zur Verfügung stehenden Gleichungen mit den entsprechenden Stoffgesetzen nur sechs. Zur Schließung des Gleichungssystems benötigt man daher noch eine weitere Gleichung.

Normierungsbedingung

Betrachtet man noch einmal den Wellenansatz (2.10), so stellt man fest, daß bisher noch nicht eindeutig definiert wurde, wie die Abhängigkeit der Störgrößen

von der x -Richtung unter der Amplitudenfunktion und der Phasenfunktion aufzuteilen ist. Dazu kann eine willkürliche Normierungsbedingung eingeführt werden, die mit der Annahme P1 verträglich ist. Mögliche Normierungen sind z.B.

$$\frac{\partial \hat{u}(\bar{x}, y_{max})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty \frac{\partial \hat{u}}{\partial \bar{x}} \hat{u} dy = 0. \quad (2.18)$$

Anhand von Gleichung (2.16) und (2.17) läßt sich die Normierungsbedingung näher spezifizieren. Angenommen, die physikalischen Anfachungsraten und Wellenzahlen sind aus Messungen des Verlaufs von u'_{max} bekannt, dann steht damit auch die Größe $\underline{\hat{\alpha}}$ fest, da eine Unterteilung nach (2.16) bzw. (2.17) im Experiment nicht gegeben ist. Die der numerischen Analyse desselben Experiments entstammenden Werte $\hat{\alpha}$ sind dann die Werte, die in der näheren Umgebung von $\underline{\hat{\alpha}}$ liegen. Sie unterliegen weiterhin der Annahme P1. Es gilt dann: $\underline{\hat{\alpha}} - \hat{\alpha} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Diese Differenz stellt den in der Amplitudenfunktion verbleibenden Anteil von Anfachungsrate und Wellenzahl dar. Da die Differenz klein ist, erfüllen auch die Amplitudenfunktionen der Störbewegung das Kriterium P1. Umgekehrt ist P1 nicht erfüllt, wenn gilt: $\underline{\hat{\alpha}} - \hat{\alpha} = \mathcal{O}(1)$. Damit ist $\partial \hat{u} / \partial \bar{x}$ von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$, und zweite Ableitungen der Amplitudenfunktionen in x -Richtung können fortan nicht vernachlässigt werden.

Die Normierungsbedingung (2.18) ist daher gleichbedeutend damit, einen Exponenten $\hat{\alpha}$ in der Nähe von $\underline{\hat{\alpha}}$ zu wählen. Solange also $\underline{\hat{\alpha}} - \hat{\alpha} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ gewährleistet ist, wird P1 nicht verletzt. Damit spricht nichts dagegen, an Stelle einer Normierungsbedingung in Form von (2.18) einfach $\hat{\alpha} = \text{konst.}$ zu setzen. In einer kleinen Umgebung \bar{x} ist dies eine gute Approximation unter der Berücksichtigung der Bedingung

$$\underline{\hat{\alpha}} - \hat{\alpha} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (2.19)$$

So hat man den entscheidenden Vorteil, daß im Gleichungssystem (2.12)–(2.14) die Terme mit $\partial \hat{\alpha} / \partial \bar{x}$ herausfallen.

Bei der numerischen Lösung des Problems hat man lediglich darauf zu achten daß (2.19) durch entsprechendes "Nachbessern" des Wertes $\hat{\alpha}$ eingehalten wird. Ein anfänglicher Schätzwert kann aus der Lösung des Orr–Sommerfeld–Problems erhalten werden.

Bei dem obigen Gleichungssystem (2.12)–(2.14) handelt es sich um ein parabolisches Problem. Es werden daher nicht nur die Randbedingungen am oberen Rand der Grenzschicht und an der Wand sondern auch die inertialen Randbedingungen am westlichen Rand des Integrationsgebietes ($\bar{x} = \bar{x}_0$) benötigt. Sie könnten aus einer Lösung des Systems für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten werden. Dies ist jedoch in einigen Fällen eine zu grobe Approximation (s. unten), da dadurch alle Effekte der Nichtparallelität verloren gehen. Das System wird dann nur noch durch die erweiterte Orr–Sommerfeld–Gleichung beschrieben.

Eine bessere Möglichkeit besteht in der Berechnung der sogenannten lokalen Lösungen des Gleichungssystems.

Lokale Lösungen

Zur Erzeugung der lokalen Lösungen wird das System (2.12)–(2.14) auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Dazu wird eine Taylor–Reihenentwicklung aller Größen in der Umgebung der Stelle \bar{x}_0 durchgeführt. Unter Einbeziehung der Methode der multiplen Skalen ergeben sich dann die Entwicklungen für die entsprechenden Größen zu

$$a = a_0 + (\bar{x} - \bar{x}_0) \left. \frac{\partial a}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}_0} + \dots = a_0 + \xi a_1 + \mathcal{O}(\xi^2) , \quad (2.20)$$

mit

$$\xi = \bar{x} - \bar{x}_0 , \quad a_1 = \left. \frac{\partial a}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}_0} , \quad a = \bar{u}, \hat{u}, \varepsilon \bar{v}, \hat{v}, \bar{\Theta}, \hat{\Theta}, \dots$$

Diese Entwicklungen werden in (2.12)–(2.14) eingesetzt und es ergibt sich das folgende System gewöhnlicher DGL'n:

Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{K}_0 + \varepsilon \mathcal{K}_1\} \vec{\Psi}_0 + \varepsilon \mathcal{K}_2 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0 \\
\{\mathcal{K}_4 + \varepsilon i \hat{\alpha}_1 \mathcal{K}_2\} \vec{\Psi}_0 + \mathcal{K}_0 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Impulsgleichung:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{M}_0 + \varepsilon \mathcal{M}_1 + \varepsilon \hat{\alpha}_1 \mathcal{M}_3\} \vec{\Psi}_0 + \varepsilon \mathcal{M}_2 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0 \\
\{\mathcal{M}_4 + \varepsilon \hat{\alpha}_1 \mathcal{M}_2\} \vec{\Psi}_0 + \mathcal{M}_0 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{E}_0 + \varepsilon \mathcal{E}_1 + \varepsilon \hat{\alpha}_1 \mathcal{E}_3\} \vec{\Psi}_0 + \varepsilon \mathcal{E}_2 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0 \\
\{\mathcal{E}_4 + \varepsilon \hat{\alpha}_1 \mathcal{E}_2\} \vec{\Psi}_0 + \mathcal{E}_0 \vec{\Psi}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Die zusätzlichen Operatoren \mathcal{K}_4 , \mathcal{M}_4 , \mathcal{E}_4 sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_4 \vec{\Psi}_0 &:= i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_1 \hat{p}_0 + \bar{\rho}_1 [i \hat{\alpha}_0 \hat{u}_0 + \hat{v}_0'] , \\
\mathcal{M}_4 \vec{\Psi}_0 &:= \bar{\rho}_1 \{ (i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_0 - i \omega) [\hat{u}_0' - i \hat{\alpha}_0 \hat{v}_0] + \bar{u}_0'' \hat{v}_0 + \bar{u}_0' (i \hat{\alpha}_0 \hat{u}_0 + \hat{v}_0') \} \\
&\quad + \bar{\rho}_1' \{ (i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_0 - i \omega) \hat{u}_0 + \bar{u}_0' \hat{v}_0 \} \\
&\quad + \bar{\rho}_0 \{ i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_1 [\hat{u}_0' - i \hat{\alpha}_0 \hat{v}_0] \\
&\quad + \bar{u}_1'' \hat{v}_0 + \bar{u}_1' (i \hat{\alpha}_0 \hat{u}_0 + \hat{v}_0') \} + \bar{\rho}_0' \{ i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_1 \hat{u}_0 + \bar{u}_1' \hat{v}_0 \} \\
&\quad - K_2 \{ \bar{\eta}_1 (\hat{u}_0''' - \hat{\alpha}_0^2 \hat{u}_0' - i \hat{\alpha}_0 \hat{v}_0'' + i \hat{\alpha}_0^3 \hat{v}_0) + 2 \bar{\eta}_1' (\hat{u}_0'' - \hat{\alpha}_0^2 \hat{u}_0) \\
&\quad + \bar{\eta}_1'' (\hat{u}_0' + i \hat{\alpha}_0 \hat{v}_0) + (\bar{u}_1''' + \hat{\alpha}_0^2 \bar{u}_1') \hat{\eta}_0 + 2 \bar{u}_1'' \hat{\eta}_0' + \bar{u}_1' \hat{\eta}_0'' \} , \\
\mathcal{E}_4 \vec{\Psi}_0 &:= (\bar{\rho}_1 \bar{c}_{p0} + \bar{\rho}_0 \bar{c}_{p1}) \{ (i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_0 - i \omega) \hat{\Theta}_0 + \bar{\Theta}_0' \hat{v}_0 \} \\
&\quad + \bar{\rho}_0 \bar{c}_{p0} \{ i \hat{\alpha}_0 \bar{u}_1 \hat{\Theta}_0 + \bar{\Theta}_1' \hat{v}_0 \} \\
&\quad - K_3 \{ \bar{\lambda}_1 (\hat{\Theta}_0'' - \hat{\alpha}_0^2 \hat{\Theta}_0) + \bar{\lambda}_1' \hat{\Theta}_0' + \hat{\lambda}_0 \bar{\Theta}_1'' + \hat{\lambda}_0' \bar{\Theta}_1' \} .
\end{aligned}$$

Auch hier braucht man zur Schließung des Gleichungssystems eine Normierungsbedingung. Aufgrund der Vorüberlegungen kann hier einfach $\hat{\alpha}_1 = 0$ gesetzt werden. Damit ist das gesamte Problem auf ein einfaches Eigenwertproblem zur Bestimmung des Eigenwertes $\hat{\alpha}_0$ und der Eigenfunktionen $\vec{\Psi}_0, \vec{\Psi}_1$ zurückgeführt.

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + \varepsilon [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T & \varepsilon [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \\ [\mathcal{K}_4 \mathcal{M}_4 \mathcal{E}_4]^T & [\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\Psi}_0 \\ \vec{\Psi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Die Randbedingungen sind problemabhängig und werden an entsprechender Stelle aufgeführt (s. Kapitel 4.3, 5.3).

Mit der Lösung von (2.24) ergibt sich dann die Anfachungsrate, bzw. die Wellenzahl nach (2.16), (2.17) zu

$$\underline{\hat{\alpha}} = i\hat{\alpha}_0 + \frac{\hat{u}_1(y_{max})}{\hat{u}_0(y_{max})}. \quad (2.25)$$

Die Lösungen, die aus (2.24) erhalten werden, werden zwar als lokale Lösungen bezeichnet, dennoch enthalten sie globale Informationen. Mit dem Wort "lokal" wird hier die Lösungsmethode bezeichnet, die die Berechnung der Stabilität einer Strömung an einer beliebigen Stelle \bar{x}_0 der Grenzschicht zuläßt und nicht auf Lösungen, die stromauf erzeugt worden sind, aufbaut. Trotzdem wird mit dieser Methode die räumliche Anfachung in Abhängigkeit vom Wandabstand (y_{max}) und Strömungsgröße näherungsweise korrekt erfaßt, da sowohl die Ableitungen der Grundströmung, als auch die der Störgrößen in x -Richtung berücksichtigt werden (s. Kapitel 4.4.1).

Abbildung 2.2 zeigt den Vergleich der mittels vollständiger PSE-Analyse ((2.12)–(2.14) und (2.16)) gewonnenen Anfachungsraten mit Anfachungsraten aus den lokalen Lösungen nach ((2.24) und (2.25)). Als Grundströmung wurde die Blasius'sche Plattengrenzschicht eingesetzt. Es zeigt sich, daß das System (2.24) eine Besonderheit birgt. Es besitzt zwei gleichwertige Eigenwerte α_{i1}, α_{i2} als Lösung (s. auch Bertolotti (1991)).

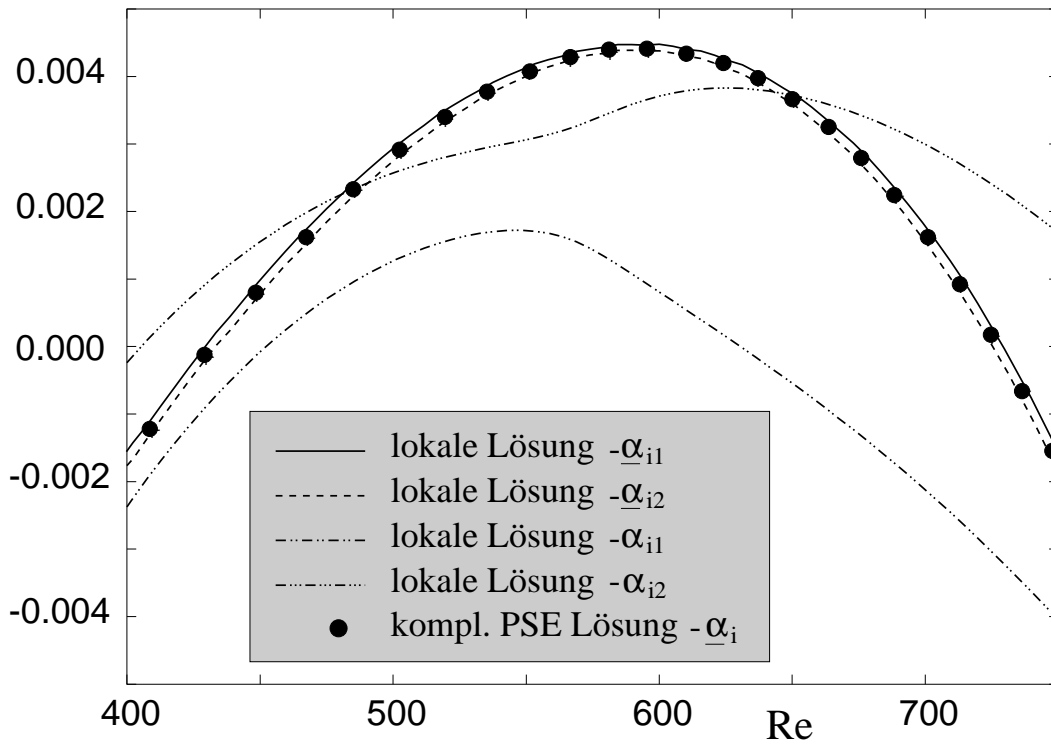


Abb. 2.2 : Vergleich der Anfachungsraten für die Blasius'sche Grenzschicht nach (2.12)–(2.14) und (2.24) für eine Frequenz $F = 2\pi f^* \nu_\infty^* / U_\infty^{*2} = 100 \cdot 10^{-6}$ bei konstanten Stoffwerten

Diese Eigenschaft macht sich jedoch in der physikalischen Anfachungsrate $\underline{\alpha}_i$ nach (2.25) kaum bemerkbar. Die Differenz beträgt hier nur noch ca. 10^{-4} und ist vernachlässigbar. Als Anfangsbedingung für eine vollständige PSE-Analyse sind beide Lösungen des Systems (2.24) als gleichwertig einzustufen. Die vollständigen PSE-Gleichungen liefern dann Anfachungsraten, die genau zwischen den aus der lokalen Analyse gewonnenen Werten liegen (s. Abbildung 2.2).

Zur Erinnerung sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß der Parameter ε , welcher in den Gleichungen (2.12)–(2.14) bzw. (2.24) noch enthalten ist, lediglich aus systematischen Gründen eingeführt wurde, um einen Größenabgleich durchführen zu können. Bei den Berechnungen spielt er jedoch keine Rolle, da diese von der physikalischen Variablen x anstatt von \bar{x} ausgehen. Im übrigen ist ε als Skalenparameter stark an das untersuchte Problem gebunden und entspricht den jeweiligen reziproken das System bestimmenden Kennzahlen (Re^{-1} , Gr^{-1}).

Bei großen Reynolds- bzw. Grashof-Zahlen vereinfacht sich das System (2.24) ($\varepsilon \rightarrow 0$), und man erhält als Grenzfall die bekannten Orr-Sommerfeld-Gleichungen.

2.2.3 Erweiterte Orr-Sommerfeld-Gleichungen für Grenzschichtströmungen

Die Orr-Sommerfeld-Gleichung ist seit den Anfängen der Stabilitätstheorie bekannt und vielfach für die verschiedensten Probleme gelöst worden. In ihrer ursprünglichen Form beschreibt diese Gleichung das zeitliche Verhalten einer zweidimensionalen Störgröße in einer parallelen Strömung. Sie lautet

$$(\bar{u} - \hat{c}) [\hat{\varphi}'' - \alpha^2 \hat{\varphi}] - \bar{u}'' \hat{\varphi} + \frac{i}{\alpha Re} [\hat{\varphi}'''' - 2\alpha^2 \hat{\varphi}'' + \alpha^4 \hat{\varphi}] = 0. \quad (2.26)$$

Der Parameter \hat{c} ist der komplexe Stabilitätsparameter, dessen Imaginärteil als Anfachungsrate über Anfachung und Dämpfung einer Störung mit der Wellenzahl α entscheidet. Anhand der vorliegenden Gleichung läßt sich auch sofort sehen, daß Nichtparallelitätseffekte sowie räumliche und auch zeitliche Zusammenhänge hier nicht berücksichtigt werden ($\varepsilon \rightarrow 0$). Zur begrifflichen Unterscheidung wird eine auf Basis dieses Modells durchgeführte Analyse **lokale parallele Analyse** genannt, wohingegen mit dem im vorherigen Kapitel hergeleiteten Modell eine **lokale nichtparallele Analyse** bzw. bei Vorliegen der vollständigen parabolischen Stabilitätsgleichungen eine **nichtlokale nichtparallele Analyse** durchgeführt wird.

Für den Grenzfall $\varepsilon = 0$ erhält man aus den Gleichungen (2.24) die um den Effekt variabler Stoffwerte erweiterten Orr-Sommerfeld-Gleichungen für ebene Parallelströmungen

$$[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \vec{\Psi} = \{0, 0, 0\}^T, \quad (2.27)$$

jetzt aber für den Fall räumlicher Anfachung.

Es könnte der Eindruck entstehen, daß der Unterschied zwischen den Ergebnissen aus (2.24) bzw. (2.12)–(2.14) und (2.27) eindeutig ist und lediglich in der Berücksichtigung des Nichtparallelitätseffektes begründet liegt. Das ist nicht ganz richtig, denn es ist zu beachten, daß je nach Definition einer Anfachungsrate (hier (2.16)) auch die Differenz der Ergebnisse unterschiedlich ausfällt. Diese Willkür in der Festlegung der räumlichen Anfachungsrate führt zu den unterschiedlichsten Auffassungen zum Thema Nichtparallelitätseffekte (Bertolotti (1991)). Ein unmittelbarer Vergleich beider Modelle ist aufgrund der angesprochenen nichteindeutigen Definition der Anfachungsrate nur bedingt möglich.

2.2.4 Stabilitätsgleichungen für die horizontale Fluidschicht

Bei der Herleitung des Modells zur Berechnung der Stabilität einer beheizten Fluidschicht werden wiederum die linearen Stördifferentialgleichungen (2.4)–(2.6) zugrundegelegt. Da die Untersuchungen sich auf primäre Störungen beschränken, ist von einem physikalischen Zustand auszugehen, in dem sich das System in Ruhe befindet. Die mittleren Geschwindigkeiten sind daher identisch null. Die Stördifferentialgleichungen vereinfachen sich zu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{U}') = 0 \quad (2.28)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t} = K_1 \rho' - \nabla p' + K_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\eta} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\eta} \nabla \cdot \vec{U}' \right] \quad (2.29)$$

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \left(\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \vec{U}' \cdot \nabla \bar{\Theta} \right) = K_3 \nabla \cdot (\bar{\lambda} \nabla \Theta' + \lambda' \nabla \bar{\Theta}) . \quad (2.30)$$

Die Fluidschicht habe eine unendliche Ausdehnung in den Schichtparallelenrichtungen x und y . In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, daß ein zweidimensionales Problem vorliegt und es kann der Wellenansatz

$$a'(x, y, z, t) = \hat{a}(z) \exp [ik_x x + ik_y y + \hat{\sigma} t] \quad (2.31)$$

für die Störgrößen formuliert werden ($a = u, v, w, \Theta, p, \rho, \eta, \lambda, c_p$). Dabei sind k_x und k_y die Wellenzahlkomponenten der Wellenzahl k in den Schichtparallelenrichtungen x und y . $\hat{\sigma}$ ist der Stabilitätsparameter, dessen Realteil σ_r die Anfachungsrate darstellt ($\sigma_r > 0$: Störungsanfachung; $\sigma_r < 0$: Dämpfung der Störungen). Es wird hier eine zeitliche Analyse durchgeführt, da es sich bei der beheizten Fluidschicht um ein absolut instabiles System handelt (s.o.). Zwischen den Wellenzahlkomponenten besteht der Zusammenhang $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Mit diesem Ansatz ergeben sich aus dem System (2.28)–(2.30) nach Elimination des Druckterms die Stabilitätsgleichungen für eine beheizte Fluidschicht bei variablen Stoffwerten zu

$$\hat{\sigma} \hat{\rho} + \bar{\rho} [ik_x \hat{u} + ik_y \hat{v} + \hat{w}'] + \bar{\rho} \hat{w} = 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \hat{\sigma} [ik_y \hat{w} - \hat{v}'] &= -ik_y K_1 \hat{\rho} \\ &+ K_2 \{ \bar{\eta} [(k_x^2 + k_y^2) \hat{v}' - \hat{v}'''] - ik_y (k_x^2 + k_y^2) \hat{w} + ik_y \hat{w}'' \} \\ &+ \bar{\eta}' [k_x k_y \hat{u} - (k_x^2 - 2k_y^2) \hat{v} - 2\hat{v}''] - \bar{\eta}'' [\hat{v}' + ik_y \hat{w}] \}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \hat{\sigma} [ik_y \hat{u} - ik_x \hat{v}] &= K_2 \{ \bar{\eta} [-ik_y (k_x^2 + k_y^2) \hat{u} + ik_y \hat{u}'' \\ &+ ik_x (k_x^2 + k_y^2) \hat{v} - ik_x \hat{v}''] \}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\bar{\rho} \bar{c}_p [\hat{\sigma} \hat{\Theta} + \hat{w} \bar{\Theta}'] = K_3 \{ \bar{\lambda} [\hat{\Theta}'' - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\Theta}] + \bar{\lambda}' \hat{\Theta}' + \hat{\lambda} \bar{\Theta}'' + \hat{\lambda}' \bar{\Theta}' \}. \quad (2.35)$$

Mit den entsprechenden Stoffgesetzen für die Stoffwerte $\bar{\rho}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\lambda}$, und \bar{c}_p beschreibt dieses Gleichungssystem das Verhalten infinitesimal kleiner Störungen in einer beheizten Fluidschicht bei temperaturabhängigen Stoffwerten. Da der Fall reiner Wärmeleitung auf Stabilität untersucht werden soll, d.h. der Zustand absoluter Ruhe, existiert keine Grundströmung. Es ist also nur ein Temperaturfeld vorhanden. Dieses Temperaturfeld wird durch die thermische Energiegleichung

$$\bar{\lambda}' \bar{\Theta}' + \bar{\lambda} \bar{\Theta}'' = 0 \quad (2.36)$$

beschrieben. Die Randbedingungen können je nach Problemstellung variieren und werden an entsprechender Stelle angegeben (s. Kapitel 3.3).

Damit sind die mathematischen Modelle, die für die Stabilitätsberechnungen eingesetzt werden, vollständig beschrieben.

2.3 Methodik zur Erfassung des Einflusses der Wärmeübertragung auf die Stabilität von Strömungen

Bei der theoretischen Untersuchung von Strömungen mit Wärmeübergang stellt die Annahme konstanter Stoffwerte eine starke Einschränkung der Modelle dar und kann in vielen Fällen nicht mehr als rationale Näherung angesehen werden. Eine natürliche Konvektionsströmung z.B. würde so gar nicht zustande kommen, da die treibende Kraft, die Auftriebskraft, von einem temperaturbedingten Dichtegradienten herrührt.

Wechselwirkungen zwischen Strömungsfeldern und Temperaturfeldern sind nur über die temperaturabhängigen Stoffwerte möglich. Sie können jedoch gerade das Stabilitätsverhalten von Strömungen wesentlich beeinflussen. In dieser Arbeit werden verschiedene Strömungstypen hinsichtlich dieser Effekte mittels asymptotischer Methoden untersucht. Daher soll zunächst eine Klassifizierung der Strömungstypen vorgenommen werden.

2.3.1 Klassifizierung der Strömungstypen

Bezüglich der Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte lassen sich zwei Typen von Strömungen unterscheiden. Zum einen sind dies natürliche Konvektionsströmungen, die durch Temperaturgradienten und den daraus resultierenden Dichtegradienten zustande kommen. Zum anderen sind es Strömungen bei erzwungener Konvektion, welche durch Aufprägung eines Druckgradienten initiiert werden. Die Kopplung von Temperaturfeld und Strömungsfeld läßt sich anhand der Abbildung 2.3 für beide Fälle deutlich unterscheiden.

Abbildung 2.3 a) zeigt schematisch den Zusammenhang zwischen dem Strömungsfeld und dem Temperaturfeld für eine Strömung bei erzwungener Konvektion. Die eingezeichneten Pfeile deuten die Stärke der Kopplung zwischen beiden Feldern an. Ist der Pfeil ausgefüllt, so handelt es sich um eine starke Kopplung, ein nicht ausgefüllter Pfeil hingegen deutet an, daß die Kopplung schwach ist.

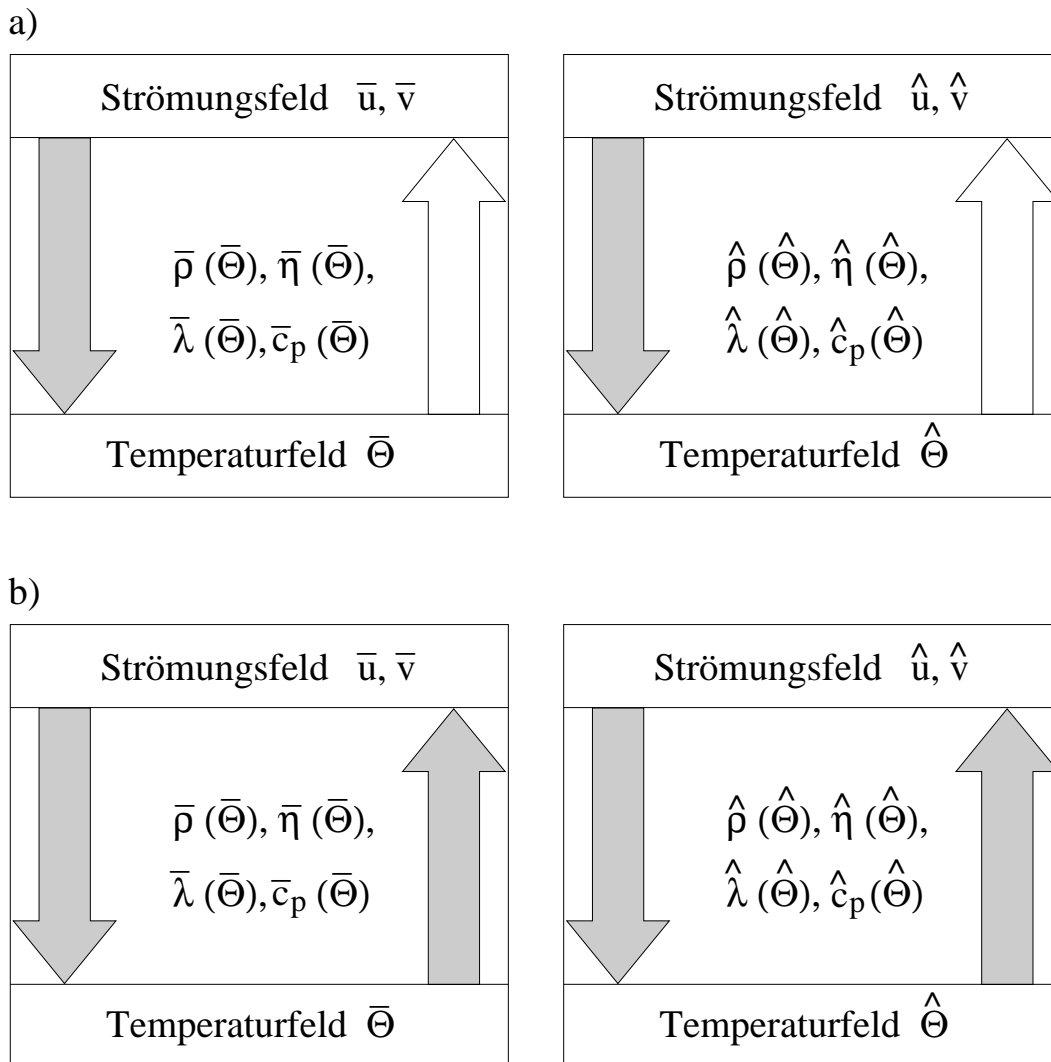


Abb. 2.3 : Schematische Darstellung der Kopplung von Strömungs- und Temperaturfeld; a) Schwach gekoppelte Systeme (z.B. Blasius'sche Grenzschicht), b) Stark gekoppelte Systeme (z.B. natürliche Konvektion an der senkrechten beheizten Platte)

Für den Fall erzwungener Konvektion läßt sich an Schema 2.3 a) also erkennen: Es besteht eine starke Kopplung nur vom Strömungsfeld in Richtung des Tempe-

raturfeldes. D.h. das Temperaturfeld kann nicht ohne Kenntnis des Strömungsfeldes bestimmt werden. Dies gilt sowohl für das reine Wärmeübertragungsproblem (Grundströmung, links) \bar{u} , \bar{v} , \bar{T} , als auch für das Störgrößenproblem (Stabilitätsproblem, rechts) \hat{u} , \hat{v} , \hat{T} . Da die Kopplung von Seiten des Temperaturfeldes nur schwach ist, sollen Systeme des Typs a) als schwach gekoppelte Systeme bezeichnet werden.

Anders stellt sich die Situation in Abbildung 2.3 b) dar. Der hier schematisch gezeigte Zusammenhang für eine Strömung bei natürlicher Konvektion verdeutlicht eine beidseitig starke Kopplung von Strömungs- und Temperaturfeld für Grundströmung und Störgrößen. Selbst bei "konstanten" Stoffwerten (Mit "konstanten" Stoffwerten ist hier die Boussinesq-Approximation gemeint. Die Dichte ist dann eine lineare Funktion der Temperatur, und alle anderen Stoffwerte sind konstant.) wird diese Kopplung aufrechterhalten (Auftriebsterm), und es müssen beide Felder simultan bestimmt werden. Eine Berechnung solcher Strömungen ist sehr viel aufwendiger als die Berechnung von Strömungen des Typs a). Im Gegensatz zu Typ a) sind dies die stark gekoppelten Systeme.

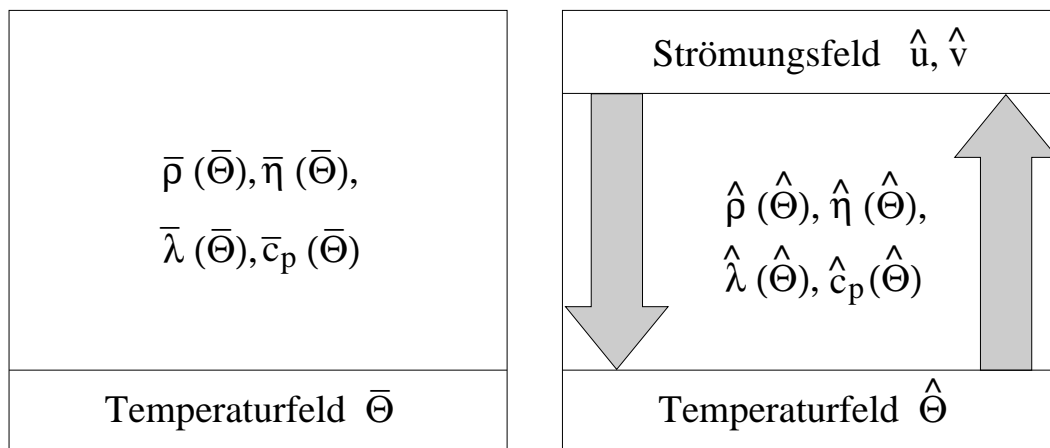


Abb. 2.4 : Schematische Darstellung der Kopplung von Strömungs- und Temperaturfeld für die horizontale beheizte Fluidschicht

Beide bisher beschriebenen Systeme gehören zu den Scherströmungen. Ein anders geartetes System ist das der beheizten Fluidschicht. Für diesen Typ von Strömung ist ein entsprechendes Schema in Abbildung 2.4 gezeigt. Bei reiner Wärmeleitung (System in Ruhe) existiert hier gar kein Strömungsfeld. Folglich

gibt es dann auch zwischen Temperaturfeld und Strömungsfeld keinen Kopplungsmechanismus. Anders verhalten sich dagegen die Störgrößen. Hier gibt es sowohl Geschwindigkeits- als auch Temperaturschwankungen und es existiert eine starke Kopplung zwischen beiden. Für das Stabilitätsproblem gilt hier das Gleiche wie für Systeme des Typs 2.3 b).

Die Art der Kopplung sagt schon einiges über die "Größe" des Stoffwerteffektes aus. So kann man erwarten, daß die Dichte im Fall der natürlichen Konvektionsströmungen einen größeren Einfluß haben wird als alle anderen Stoffwerte, da der Dichtegradient der eigentliche Antrieb in diesen Strömungen ist. Dahingegen ist der Einfluß der Dichte und der Viskosität bei erzwungener Konvektion etwa gleich einzuschätzen. Mit "Größe" ist hier nicht etwa der tatsächliche Wert des Effektes gemeint sondern die asymptotische Größenordnung (s. unten). Das Wissen über die asymptotische Größenordnung ist von entscheidender Bedeutung, will man eine systematische Untersuchung verschiedener Effekte durchführen.

2.3.2 Asymptotische Methode

In Kapitel 2.2.2 ist der Grundgedanke der Asymptotik unter dem Begriff "Methode der multiplen Skalen" schon einmal aufgetaucht. Hier war die Rede von einem kleinen Skalenparameter ($\varepsilon \ll 1$). Dieser Skalenparameter entspricht dem Kehrwert der für das jeweilige Strömungsproblem spezifischen Kennzahl. Die Kennzahlen tauchen in den dimensionslosen Bilanzgleichungen als charakteristische Parameter auf. Es sind z.B. die Reynolds-Zahl, Prandtl-Zahl, oder dimensionslose Kombinationen geometrischer Größen. Häufig ist es besonders einfach, die Bilanzgleichungen für bestimmte Grenzwerte dieser Kennzahlen zu lösen (0 oder ∞), da sich die Gleichungen dann stark vereinfachen lassen (asymptotische Grenzlösungen). Da aber gerade das Verhalten der Lösungen im Bereich um diese Grenzwerte entscheidend sein und wichtige Informationen für den übrigen Parameterbereich liefern kann, ist es unumgänglich, Lösungen

in der Nähe der Grenzwerte zu erzeugen. Hier können asymptotische Theorien helfen. Im Rahmen einer Störungsrechnung lassen sich dann Grenzlösungen errechnen, die exakt mit den Lösungen der vollständigen Grundgleichungen übereinstimmen. Für kleine, aber endliche Abweichungen eines Störparameters ε vom Grenzwert erhält man die sogenannten asymptotischen Näherungen, welche umso besser mit den exakten Lösungen übereinstimmen, je näher der Parameter am Grenzwert liegt.

Um eine Störungsrechnung durchführen zu können, muß zunächst der Störparameter des Problems gefunden werden. Die Lösung des Problems wird in Form einer Reihenentwicklung nach dem Störparameter angesetzt. Grenzlösungen werden durch den führenden Term dieser Entwicklung repräsentiert. Im Fall der Gleichungen aus Kapitel 2.2.2 ist der Skalenparameter ε Störparameter. Die Grenzlösung des Systems erhält man für $\varepsilon = 0$. Sie wird durch die Orr–Sommerfeld–Gleichungen beschrieben und durch die Terme höherer Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ "gestört".

Eine systematische Verbesserung der asymptotischen Ergebnisse kann durch Hinzunahme weiterer Glieder der asymptotischen Reihe erreicht werden. Der Fehler, mit dem die Lösungen behaftet sind, ist definitionsgemäß von der Größenordnung des ersten vernachlässigten Terms. Da eine solche Reihe nicht notwendigerweise konvergent ist, wird die Lösung für einen festen Wert des Störparameters durch Addition weiterer Terme nicht zwangsläufig verbessert. Entscheidend ist jedoch das asymptotische Verhalten für den Grenzübergang dieses Parameters.

In der Asymptotik unterscheidet man zwischen **regulären** und **singulären** Störungsproblemen. Diese Unterscheidung orientiert sich an der Lösungsstruktur der Probleme.

Reguläre und singuläre Störungsprobleme

Bei der mathematischen Abstraktion physikalischer Zusammenhänge kann es vorkommen, daß eine Gleichung ein Gebiet beschreibt, in dem verschiedene physikalische Effekte auftreten. Bei der Bestimmung von Grenzlösungen dieser Gleichung kann es zur vollständigen Vernachlässigung wesentlicher physikalischer Effekte kommen, und Lösungen sind dann nicht mehr physikalisch korrekt. Die beschreibenden Gleichungen sind entartet. Dieser Effekt tritt auf, wenn eine Reihenentwicklung nicht im gesamten Berechnungsgebiet der physikalischen Realität entspricht. In diesem Fall muß eine singuläre Störungsrechnung durchgeführt werden, bei der den verschiedenen physikalischen Gegebenheiten durch entsprechende Reihenansätze Rechnung getragen wird. Ein solches Problem liegt z.B. bei der Umströmung von Körpern bei großen Reynolds-Zahlen vor, bei der ein wandnaher und ein wandferner Bereich zu unterscheiden sind. Die Grenzschichttheorie ist eine Folge aus eben dieser Unterscheidung. Die Grenzschichtgleichungen ihrerseits modellieren die Physik im wandnahen Bereich im Sinne einer rationalen Theorie korrekt und sind somit in diesem Bereich uneingeschränkt gültig.

Ein reguläres Störungsproblem liegt vor, wenn die mathematische Formulierung eines physikalischen Zusammenhangs im gesamten Bereich auch für Grenzwerte entsprechender Störparameter gleichmäßig gültig ist. Es sind dann alle wesentlichen physikalischen Effekte im Modell enthalten und es kann nicht zur Entartung der beschreibenden Gleichungen kommen. Die asymptotische Theorie zur Erfassung des Einflusses variabler Stoffwerte ist ein solches reguläres Störungsproblem.

Die Stabilitätsgleichungen, die in den vorangegangenen Kapiteln hergeleitet worden sind, beinhalten variable Stoffwerte. Für den Fall konstanter Stoffwerte stellen sie den führenden Term in einer asymptotischen Entwicklung bezüglich der Stoffwerte dar. Die Vernachlässigung der Stoffwerteabhängigkeiten ist gerechtfertigt, solange die angegebenen Gleichungen eine rationale Näherung der

allgemeinen Gleichungen bei schwach veränderlichen Stoffwerten darstellen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie eine reguläre Störungsrechnung zur systematischen Verbesserung der aus den Gleichungen für konstante Stoffwerte gewonnenen Ergebnisse beitragen kann. Es stellt sich heraus, daß mit Hilfe der asymptotischen Methode alle Stoffwerteffekte unabhängig von konkreten Stoffgesetzen erfaßt werden können. So lassen sich universelle Ergebnisse errechnen, die allgemeingültig, d.h. für beliebige Newtonsche Fluide (z.B. Wasser, Öl, Luft, ...) einsetzbar sind. Aufgrund der klaren Trennung der einzelnen Effekte sind die Ergebnisse besonders zugänglich für eine physikalische Interpretation.

Die beschriebene Methodik ist prinzipiell auf alle Strömungsformen anwendbar. Entscheidend ist, daß die Abweichungen von dem Fall konstanter Stoffwerte asymptotisch sind. Konkrete Anwendungsbeispiele sind auch bei Herwig (1985) nachzulesen.

Die für die Impuls- und Wärmeübertragung relevanten Stoffwerte sind die Dichte und die isobare spezifische Wärmekapazität (thermodynamische Größen) sowie die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit (Transportkoeffizienten).

Eine Entwicklung der Stoffwerte in eine dimensionslose Taylor-Reihe ergibt

$$a = 1 + K_{aT}T + K_{aP}P + \dots \quad (a = \frac{\rho^*}{\rho_B^*}, \frac{\eta^*}{\eta_B^*}, \dots) \quad (2.37)$$

mit

$$T = \frac{T^* - T_B^*}{T_B^*}, \quad P = \frac{p^* - p_B^*}{(\rho^* c_p^* T^*)_B}, \quad K_{aT} = \left[\frac{\partial a^*}{\partial T^*} \frac{T^*}{a^*} \right]_B,$$

$$K_{aP} = \left[\frac{\partial a^*}{\partial p^*} \frac{\rho^* c_p^* T^*}{a^*} \right]_B.$$

Aus

$$P = p \frac{U^{*2}}{c_p^* T^*} \Big|_B \quad \left(p = \frac{p^* - p_B^*}{\rho_B^* U_B^{*2}} = \mathcal{O}(1) \right) \quad (2.38)$$

folgt

$$P \sim Ec \quad \left(Ec = \frac{U^{*2}}{c_p^* T^*} \right)_B : \text{Eckert-Zahl} \quad (2.39)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Druckabhängigkeit der Stoffwerte nicht berücksichtigt. Das bedeutet, es wird der asymptotische Grenzfall $Ec \rightarrow 0$ betrachtet (s. Anmerkung Kapitel 2.2.1). Aus dieser Annahme folgt, daß auch die Temperaturänderungen aufgrund von Dissipationseffekten zu vernachlässigen sind.

Tabelle 2.2: Stoffkonstanten für Luft und Wasser ($p_B^* = 1 \text{ bar}$, $T_B^* = 293 \text{ K}$)

	K_ρ	$K_{\rho 2}$	$K_{\rho 3}$	K_η	$K_{\eta 2}$	K_λ	$K_{\lambda 2}$	K_c	K_{c2}
Luft	−1.000	2.000	6.000	0.775	−0.352	0.891	−0.257	0.068	−0.076
Wasser	−0.057	−0.906	—	−7.132	78.160	0.823	−2.595	−0.052	1.488

Tabelle 2.2 enthält die relevanten K -Werte für Luft als typisches Gas und Wasser als typische Flüssigkeit. Da in der vorliegenden Arbeit nur die Temperaturabhängigkeit der beteiligten Stoffwerte in die Untersuchungen eingeht, gilt im folgenden $K_a \equiv K_{aT}$.

Mit Einführung des Störparameters

$$\varepsilon = \frac{\Delta_B T^*}{T_B^*} \quad (2.40)$$

folgt aus Gleichung (2.37) (die Wahl von $\Delta_B T^*$ ist abhängig von der thermischen Randbedingung)

$$a = 1 + \varepsilon K_a \Theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) ; \quad \Theta = \frac{T^* - T_B^*}{\Delta_B T^*} . \quad (2.41)$$

Ausgehend von dieser Stoffwertentwicklung lässt sich eine systematische Störungsrechnung in 4 Schritten durchführen.

1. Herleitung der vollständigen Grundgleichungen

Die Grundgleichungen (Stabilitätsgleichungen, Gleichungen für Grundströmungen) müssen unter Berücksichtigung variabler Stoffwerte hergeleitet werden (s. Kapitel 2.2).

2. Ansätze für die abhängigen Variablen

Alle abhängigen Variablen (Geschwindigkeit, Temperatur, ...) werden entsprechend der Stoffwerte in asymptotische Reihen entwickelt. Mit $(A = u, v, \Theta, \dots)$ gilt

$$A = A_0 + \varepsilon K_\rho A_\rho + \varepsilon K_\eta A_\eta + \varepsilon K_c A_c + \varepsilon K_\lambda A_\lambda + \dots \quad (2.42)$$

3. Herleitung und Lösung der Gleichungssysteme nullter und höherer Ordnungen

Die Ansätze (2.41) (Stoffwertentwicklungen) und (2.42) (Entwicklungen der abhängigen Variablen) werden in die vollständigen Gleichungen eingesetzt. Nach Separation der Ordnungen von εK_a ($a = \rho, \eta, c_p, \lambda$) können die entstehenden Gleichungen sukzessiv gelöst werden. Die führende Ordnung (Index 0) beschreibt immer den Fall konstanter Stoffwerte bzw. für natürliche Konvektionsströmungen den Fall der Boussinesq-Approximation. Die Lösungen der höheren Ordnungen (Index 1, 2, ...) sind unabhängig von dem Zahlenwert der Stoffkonstanten K_a und des Parameters ε .

4. Aufstellung von Korrekturbeziehungen

Die Lösungen der einzelnen Ordnungen lassen sich entsprechend der oben stehenden Ansätze zusammenfassen und bei Bedarf in andere Darstellungen (z.B. nach der Referenztemperatur-Methode oder der Stoffwertverhältnis-Methode) umrechnen.

In dieser Arbeit wird es vorrangig um die Darstellung der Abhängigkeit der kritischen Parameter bzw. der kritischen Werte der Kennzahlen vom Wärmeübertragungsparameter ε gehen. Daher werden die Korrekturbeziehungen unter 4. die Form

$$\begin{aligned} A_{krit} = & A_{0,krit} + \varepsilon [K_\rho A_\rho + K_{\rho A} A_{\rho A} + K_\eta A_\eta + K_\lambda A_\lambda + K_c A_c] \\ & + \varepsilon^2 [K_\rho^2 A_{\rho\rho} + K_\rho K_{\rho A} A_{\rho\rho A} + K_\rho K_\eta A_{\rho\eta} + \dots + K_c^2 A_{cc} + K_{c2} A_{c2}] \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.43)$$

haben (Im Falle der erzwungenen Konvektion gilt: $K_{\rho A} = K_{\rho 2}$).

Einordnung der Stoffwerteffekte in eine asymptotische Hierarchie

Wie schon erwähnt, können die einzelnen Stoffwerte in verschiedenen Strömungstypen sehr unterschiedliche Effekte haben. Es war von der asymptotischen Größenordnung der einzelnen Effekte die Rede. Zum besseren Verständnis soll an dieser Stelle der Begriff asymptotische Größenordnung definiert werden.

Es ist wichtig zu betonen, daß sich der Begriff "asymptotische Größenordnung" nicht etwa auf Zahlenwerte bezieht sondern auf Funktionen, im vorliegenden Fall auf Funktionen von ε . Der Begriff der "asymptotischen Größenordnung" einer Funktion ist immer als Vergleich zu einer anderen Funktion anzusehen.

Es seien zwei Funktionen $f(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon)$ gegeben, wobei $g(\varepsilon)$ die Vergleichsfunktion sei. Formal kann dann für " $f(\varepsilon)$ ist von der asymptotischen Größenordnung $g(\varepsilon)$ "

$$f(\varepsilon) = \mathcal{O}(g(\varepsilon)) , \quad \text{wenn} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = K < \infty \quad (2.44)$$

geschrieben werden. Das bedeutet, daß $f(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon)$ "gleich schnell" einem Grenzwert zustreben, der Grenzwert von $f(\varepsilon)/g(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ also eine von null verschiedene Konstante K ist.

Nun können auch die Symbole $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$... besser eingeordnet werden. In Gleichung (2.41) besagt der Term $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, daß es sich bei den restlichen Termen der asymptotischen Entwicklung des Stoffwertes a um Terme von der asymptotischen Größenordnung ε^2 handelt. Führt man die Reihe weiter fort, so bekommt man für die höheren Ordnungen $f(\varepsilon) = 1/2\varepsilon^2 K_{a2}\Theta^2 + 1/6\varepsilon^3 K_{a3}\Theta^3 + \dots$. Eine entsprechende Grenzwertbetrachtung nach (2.44) ergibt dann mit der Vergleichsfunktion $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$ den Grenzwert $1/2K_{a2}\Theta^2$.

Ein weiteres Größenordnungssymbol ist

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \text{ , wenn } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0. \quad (2.45)$$

Dieses Symbol besagt, daß eine Funktion $f(\varepsilon)$ von asymptotisch kleinerer Größenordnung ist als die Vergleichsfunktion $g(\varepsilon)$. Würden die höheren Ordnungen in (2.41) $f(\varepsilon) = 1/3\varepsilon^{1.5} K_{a2}\Theta^{1.5} + 1/6\varepsilon^{2.5} K_{a3}\Theta^{2.5} \dots$ lauten, so könnte man das Symbol $o(\varepsilon)$ an Stelle von $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ gebrauchen, da damit sichergestellt ist, daß die Terme höherer Ordnung von einer asymptotisch kleineren Ordnung sind als $g(\varepsilon) = \varepsilon$. In dieser Arbeit wird jedoch nur das erstgenannte Symbol verwendet.

Mit Hilfe dieser Symbole läßt sich nun die Einordnung der Stoffwerteffekte in eine asymptotische Hierarchie darstellen. Für die verschiedenen Strömungstypen ist das anhand der Abbildung 2.5 gezeigt. Dabei ist erkennbar, bis zu welcher Ordnung die einzelnen Stoffwertentwicklungen (Spalten) in den jeweiligen Gleichungsordnungen (Zeilen) berücksichtigt werden müssen. Auf der linken Seite sind jeweils die Einflüsse der Stoffwerte auf die Geschwindigkeitsfelder gezeigt, auf der rechten Seite die auf das Temperaturfeld. Es zeigt sich auch hier deutlich der Unterschied zwischen natürlichen Konvektionsströmungen und Strömungen bei erzwungener Konvektion. Durch die Pfeile wird die Richtung der Kopplung zwischen Strömungs- und Temperaturfeld angezeigt. Die Systeme 0. Ordnung beinhalten bei der erzwungenen Konvektion keinen Stoffwerteffekt. Das Temperaturfeld ist einseitig an das Geschwindigkeitsfeld gekoppelt und ist nicht unabhängig von diesem lösbar.

a) Erzwungene Konvektion

Geschwindigkeitsfeld					Temperaturfeld				
	ρ	η	λ	c_p		ρ	η	λ	c_p
0.Ordnung	1	1	---	---	\rightarrow	1	1	1	1
1.Ordnung	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	1	1	\nearrow	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$
2.Ordnung	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	\rightarrow	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$
...

b) Natürliche Konvektion

Geschwindigkeitsfeld					Temperaturfeld				
	ρ	η	λ	c_p		ρ	η	λ	c_p
0.Ordnung	$1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$	1	1	1	\rightleftharpoons	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	1	1	1
1.Ordnung	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	\rightleftharpoons	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$
2.Ordnung	$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	\rightleftharpoons	$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$
...

Abb. 2.5 : Asymptotische Hierarchie der einzelnen Stoffwerteffekte bei a) erzwungener und b) natürlicher Konvektion.

In der 1. Ordnung tauchen die ersten Stoffwerteffekte im Strömungsfeld in Form der Dichte- und Viskositätsänderung auf. Diese Effekte sind durch die einseitige Kopplung der Impulsgleichung 1. Ordnung an die thermische Energiegleichung 0. Ordnung bedingt. Die Änderungen der Wärmeleitfähigkeit und der spezifischen isobaren Wärmekapazität durch das Temperaturfeld tauchen erst in der

Energiegleichung 1. Ordnung auf und wirken sich im Stömungsfeld erst in der 2. Ordnung aus. Bei der Untersuchung der Stabilität einer Stömung bei erzwungener Konvektion muß daher die Impulsgleichung jeweils bis zu einer Ordnung höher gelöst werden, um die Stoffwerteffekte bis zu dieser asymptotischen Ordnung vollständig zu erfassen. Z.B. ist es streng asymptotisch gesehen daher nicht richtig, den Einfluß temperaturabhängiger Viskosität auf die Stabilität von Strömungen gegenüber dem Einfluß der Dichte stärker zu bewerten, da beide von gleicher asymptotischer Größenordnung sind. Untersuchungen zum Einfluß von Temperatureffekten basieren aber üblicherweise nur auf dem Viskositätseinfluß (z.B. Wazzan et al.(1972)).

Natürliche Konvektionsströmungen weisen schon in der 0. Ordnung Effekte temperaturabhängiger Dichte auf. Wenn bei diesen Strömungen von konstanten Stoffwerten gesprochen werden kann, so nur im Sinne der Boussinesq-Approximation. Dadurch kommt es zu einer gegenseitigen Kopplung von Temperaturfeld und Strömungsfeld, in Abbildung 2.5 durch den Doppelpfeil dargestellt. Dieser Kopplungsmechanismus pflanzt sich in die höheren Ordnungen fort und ist Ursache dafür, daß aus asymptotischer Sicht bei der Erfassung der Effekte 1. Ordnung alle Stoffwerteinflüsse berücksichtigt werden müssen. Eine weitere Änderung gegenüber der erzwungenen Konvektion liegt darin, daß durch die starke gegenseitige Kopplung von Temperatur- und Strömungsfeld auch die Lösung der beschreibenden Gleichungen aufwendiger wird. Beide Felder müssen jetzt simultan gelöst werden, was aufgrund der erhöhten Anzahl der Gleichungen einen Mehraufwand an Rechenzeit zur Folge hat.

2.3.3 Kombinierte Methode

Die oben beschriebene asymptotische Methode zur Bestimmung der Einflüsse variabler Stoffwerte auf das Stabilitätsverhalten von Strömungen verlangt, wie anhand von Abbildung 2.5 zu sehen ist, die Entwicklung aller benötigten Gleichungen bis zur entsprechenden Ordnung. Gerade, wenn man die Effekte höher-

er Ordnung erfassen will, ist der damit verbundene Aufwand an Analytik und Rechenleistung oft groß. Auch die Fehleranfälligkeit solcher Herleitungen ist nicht zu verachten, sofern man nicht auf computergestützte Entwicklung der Gleichungen zurückgreifen kann. Um dennoch Ergebnisse in Form asymptotischer Reihen zu bekommen und nicht auf Allgemeingültigkeit und gute Interpretierbarkeit verzichten zu müssen, bietet sich an, von der sogenannten **kombinierten Methode** Gebrauch zu machen (s. Herwig, Schäfer (1995)).

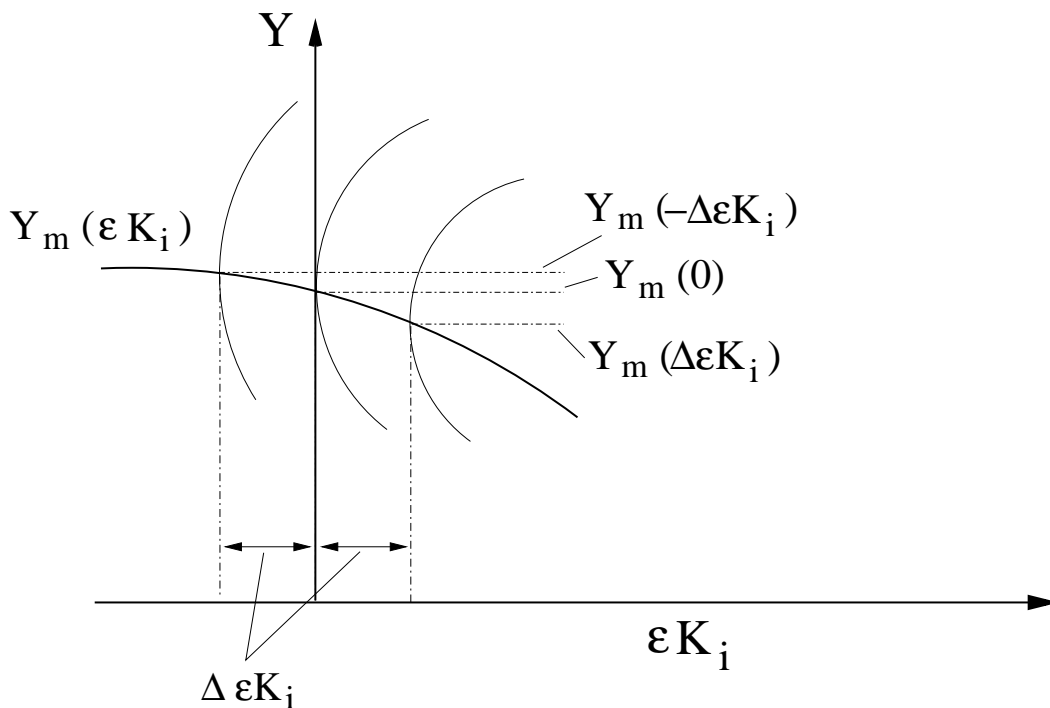


Abb. 2.6 : Bestimmung der Einflußfunktionen A_{ij} der asymptotischen Reihen

Diese Methode kombiniert die asymptotische Struktur der Lösung mit einer direkten Berechnung der vollständigen Gleichungen inklusive der variablen Stoffwerte. Die Einflußfunktionen A_{ij} (Gleichung (2.43)), welche die Koeffizienten in der asymptotischen Reihe darstellen, werden hierbei durch eine numerische Approximation verschiedener Differentialquotienten gewonnen.

In Abbildung 2.6 ist dieses Verfahren schematisch dargestellt. Es ist das Verhalten der Minima einer Funktion Y für verschiedene Werte von εK_i gesucht, also die Funktion $Y_m(\varepsilon K_i)$. Da die Lösungsstruktur des Problems durch (2.43) gegeben ist, müssen nur noch die Einflußfunktionen A_{ij} durch mehrmaliges Lösen

der Gleichungen für Y an verschiedenen Stellen εK_i bestimmt werden. Die Differentialquotienten A_{ij} ergeben sich dann aus den numerischen Approximationen der Ableitungen der Funktion Y_m zu

$$A_i = \left[\frac{\partial Y_m}{\partial \varepsilon K_i} \right]_0 = \lim_{\Delta \varepsilon K_i \rightarrow 0} \left[\frac{Y_m(\Delta \varepsilon K_i) - Y_m(-\Delta \varepsilon K_i)}{2 \Delta \varepsilon K_i} \right]_0, \quad (2.46)$$

$$A_{ii} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 Y_m}{\partial (\varepsilon K_i)^2} \right]_0 = \lim_{\Delta \varepsilon K_i \rightarrow 0} \left[\frac{Y_m(\Delta \varepsilon K_i) - 2Y_m(0) + Y_m(-\Delta \varepsilon K_i)}{2(\Delta \varepsilon K_i)^2} \right]_0. \quad (2.47)$$

Bei Abhängigkeit des Problems von mehreren Variablen ergeben sich die gemischten Ableitungen zu

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left[\frac{\partial^2 Y_m}{\partial \varepsilon K_i \partial \varepsilon K_j} \right]_0 \\ &= \lim_{\Delta \varepsilon K_j \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\Delta \varepsilon K_i \rightarrow 0} \left[\frac{Y_m(\Delta \varepsilon K_i, \Delta \varepsilon K_j) - Y_m(-\Delta \varepsilon K_i, \Delta \varepsilon K_j)}{2 \Delta \varepsilon K_i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{Y_m(\Delta \varepsilon K_i, -\Delta \varepsilon K_j) - Y_m(-\Delta \varepsilon K_i, -\Delta \varepsilon K_j)}{2 \Delta \varepsilon K_i} \right] / 2 \Delta \varepsilon K_j \right\}_0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die Indizierung ij steht für die entsprechenden Stoffwertabhängigkeiten und muß entsprechend der Ordnung n der Korrekturbeziehung (2.43) und der Anzahl der beteiligten Stoffwerte erweitert werden. Mit A_{ij} können z.B. alle Einflüsse bis zur 2. Ordnung beschrieben werden.

3 Stabilität einer horizontalen beheizten Fluidschicht; stark gekoppeltes Problem

3.1 Vorbemerkungen

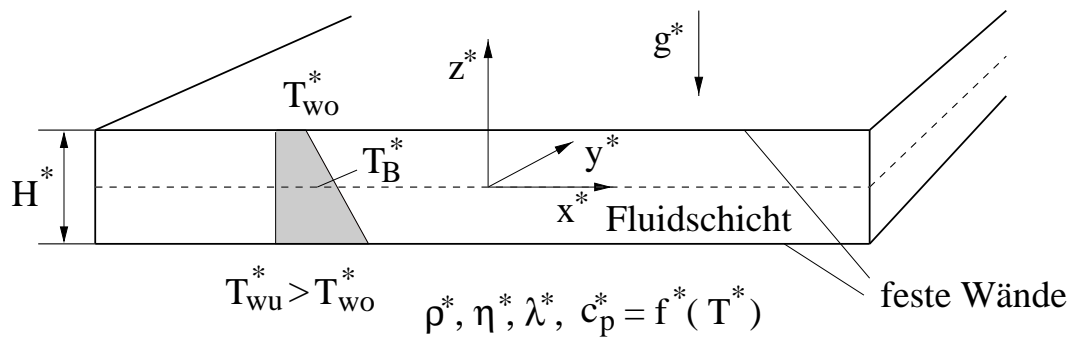


Abb. 3.1 : Schematische Darstellung der horizontalen beheizten Fluidschicht (Rayleigh-Bénard-Konvektion)

In diesem Kapitel wird die Stabilität der horizontalen beheizten Fluidschicht mit fester Berandung an Ober- und Unterseite nach Abbildung 3.1 betrachtet. Es wird die Stabilität des Grundzustandes untersucht, in dem sich das System in Ruhe befindet. Im Grundzustand befindet sich das wärmere und damit leichtere Fluid unterhalb des kalten schwereren Fluides. Dieser potentiell instabile Zustand wird durch die Viskosität des Fluides stabilisiert. Erreicht der Temperaturgradient, der sich durch die Beheizung über der Schicht einstellt, einen bestimmten kritischen Wert, so obsiegen die Auftriebskräfte über die viskosen Kräfte und es kommt zur Ausbildung einer Konvektionsströmung in Form von Konvektionswalzen.

Die ersten quantitativen Untersuchungen experimenteller Art sind von Bénard 1900 durchgeführt worden. Erst 1916 formulierte Lord Rayleigh eine mathema-

tische Beschreibung zu diesen Versuchen. In der Literatur spricht man daher vom sogenannten Rayleigh–Bénard–Problem.

Bis heute sind viel theoretische und experimentelle Arbeiten zur Rayleigh–Bénard–Konvektion veröffentlicht worden (s. z.B. Reid & Harris (1958), Chandrasekhar (1961), Drazin & Reid (1981)). Sehr viele der theoretischen Arbeiten basieren jedoch auf der Boussinesq–Approximation und machen daher keine Aussagen über den Einfluß variabler Stoffwerte, die bei natürlicher Konvektion eine große Rolle spielen können. Gerade im Vergleich zwischen Experimenten und Theorie kann dieser Einfluß sehr wichtig sein (Koschmieder (1993)). Theoretische Untersuchungen zu den Effekten variabler Stoffwerte sind zumeist auf den Effekt der temperaturabhängigen Viskosität beschränkt und zudem noch auf spezielle Stoffe, so daß die Ergebnisse keine allgemeingültigen Aussagen zulassen. Entsprechende Arbeiten sind z.B. von Stengel et al. (1982) oder Busse und Frick (1985).

Fröhlich et al. (1992) analysierten erstmals systematisch den Effekt variabler Stoffwerte als Funktion der dimensionslosen Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Fluidschicht. Aber auch ihre Ergebnisse sind auf ein spezielles Fluid beschränkt (Luft bei 300K).

In der vorliegenden Arbeit wird daher die in Kapitel 2 beschriebene asymptotische Methode angewandt, um allgemeine Aussagen über die Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte auf die kritische Rayleigh–Zahl zu gewinnen. Das zugrundeliegende mathematische Modell ist in Kapitel 2.2.4 in Form der Gleichungen (2.32)–(2.36) hergeleitet worden. Zur Festlegung der Kennzahlen K_1 – K_3 in den Gleichungen (2.32)–(2.35) bedarf es einer Sonderbetrachtung des Auftriebsterms $-i k_y K_1 \hat{\rho}$. In einer asymptotischen Entwicklung der Gleichungen (2.32)–(2.35) wird dieser zu

$$-i k_y K_1 \hat{\rho} = \frac{g^* L_B^*}{U_B^{*2}} \left[\varepsilon K_\rho \hat{\Theta} + \varepsilon^2 K_{\rho 2} \bar{\Theta} \hat{\Theta} + \dots \right]. \quad (3.1)$$

Dabei ist ε der Entwicklungsparameter und entspricht der dimensionslosen Temperaturdifferenz $\varepsilon = (T_{wu}^* - T_{wo}^*)/2T_B^*$. Die hier angewandte Theorie ist eine Theorie für $\varepsilon \rightarrow 0$, so daß im Grenzfall $\varepsilon = 0$ der Auftriebsterm verschwinden würde und die Gleichungen entarten. Durch eine entsprechende Wahl der Bezugsgeschwindigkeit (s. Herwig et al. (1985)) kann dies jedoch verhindert werden. Herwig et al. schlagen daher für natürliche Konvektionsströmungen die Bezugsgeschwindigkeit $U_B^* = \sqrt{L_B^* g^* \beta_B^* \Delta_B T^*}$ vor, so daß mit $\beta_B^* \Delta_B T^* = -\varepsilon K_\rho$ der Auftriebsterm als

$$-i k_y K_1 \hat{\rho} = -i k_y \left[\hat{\Theta} + \varepsilon K_{\rho A} \bar{\Theta} \hat{\Theta} + \dots \right] \quad (3.2)$$

geschrieben werden kann ($K_{\rho A} = K_{\rho 2}/K_\rho$). Somit verbleibt der Auftriebsterm auch für den Grenzfall $\varepsilon = 0$ in den Gleichungen, und die Boussinesq-Approximation kann als 0. Ordnung einer asymptotischen Entwicklung angesehen werden. Als weitere Bezugsgrößen werden die Stoffwerte bei $T^* = T_B^*$ sowie die halbe Höhe der Fluidschicht $L_B^* = H^*/2$ und die halbe Temperaturdifferenz $\Delta_B T^* = (T_{wu}^* - T_{wo}^*)/2$ verwendet. Die Kennzahlen K_2 und K_3 ergeben sich dann zu

$$K_2 = 4 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}, \quad K_3 = \frac{4}{\sqrt{Pr Ra}}. \quad (3.3)$$

Dabei ist $Pr = \eta_B^* c_{pB}^* / \lambda_B^*$ die Prandtl-Zahl, und die Rayleigh-Zahl ist durch $Ra = g^* \beta^* \Delta_B T^* H^{*3} \rho_B^* c_{pB}^* / (\nu_B^* \lambda_B^*)$ gegeben. Zunächst soll die Methodik der asymptotischen Entwicklung, wie sie in Kapitel 2.3 vorgestellt wurde, illustriert werden. Dazu wird im folgenden am Beispiel der temperaturabhängigen Viskosität die asymptotische Methode mit der kombinierten Methode verglichen, bevor dann später die Ergebnisse für die übrigen Stoffwerteffekte mittels der kombinierten Methode bestimmt werden.

3.2 Temperaturfeld des Grundzustandes

Im betrachteten System (Abbildung 3.1) sind alle Strömungsgeschwindigkeiten identisch null. Das Temperaturfeld hingegen wird durch die Gleichung (2.36) beschrieben und ist abhängig von der Funktion $\bar{\lambda}(\bar{\Theta})$. Ohne Angabe eines speziellen Stoffgesetzes ist Gleichung (2.36) jedoch nicht lösbar. Die Entwicklung von (2.36) nach der in Kapitel 2.3 vorgestellten Methode, basierend auf einem Reihenansatz des Stoffgesetzes für $\bar{\lambda}$ nach (2.37), ergibt (bis zur 2. Ordnung)

$$\bar{\Theta}_0'' = 0 \quad ; \quad \mathcal{O}(\varepsilon^0), \quad (3.4)$$

$$\bar{\Theta}_\lambda'' + \bar{\Theta}_0'^2 + \bar{\Theta}_0 \bar{\Theta}_0'' = 0 \quad ; \quad \mathcal{O}(\varepsilon K_\lambda), \quad (3.5)$$

$$\bar{\Theta}_{\lambda\lambda}'' + 2\bar{\Theta}_0' \bar{\Theta}_\lambda' + \bar{\Theta}_0 \bar{\Theta}_\lambda'' + \bar{\Theta}_\lambda \bar{\Theta}_0'' = 0 \quad ; \quad \mathcal{O}(\varepsilon^2 K_\lambda^2), \quad (3.6)$$

$$2\bar{\Theta}_{\lambda 2}'' + 2\bar{\Theta}_0^2 \bar{\Theta}_0'' + \bar{\Theta}_0 \bar{\Theta}_0'^2 = 0 \quad ; \quad \mathcal{O}(\varepsilon^2 K_{\lambda 2}). \quad (3.7)$$

Die entsprechenden Randbedingungen lauten

$$\bar{\Theta}_0(-1) - 1 = \bar{\Theta}_0(1) + 1 = \bar{\Theta}_\lambda(\pm 1) = \bar{\Theta}_{\lambda\lambda}(\pm 1) = \bar{\Theta}_{\lambda 2}(\pm 1) = 0. \quad (3.8)$$

Das System (3.4)–(3.8) kann sukzessiv gelöst werden. Die analytischen Lösungen sind in Abbildung 3.2 gezeigt.

Mit dieser Entwicklung sind nun alle Einflüsse der Wärmeleitfähigkeit $\bar{\lambda}$ auf die Temperaturverteilung bis zur 2. Ordnung unabhängig von einem konkreten Stoffgesetz erfaßt, und die Ergebnisse aus Abbildung 3.2 können für beliebige Fluide unter Verwendung der Stoffkonstanten K_λ und $K_{\lambda 2}$ eingesetzt werden (s. Gleichung (2.42)).

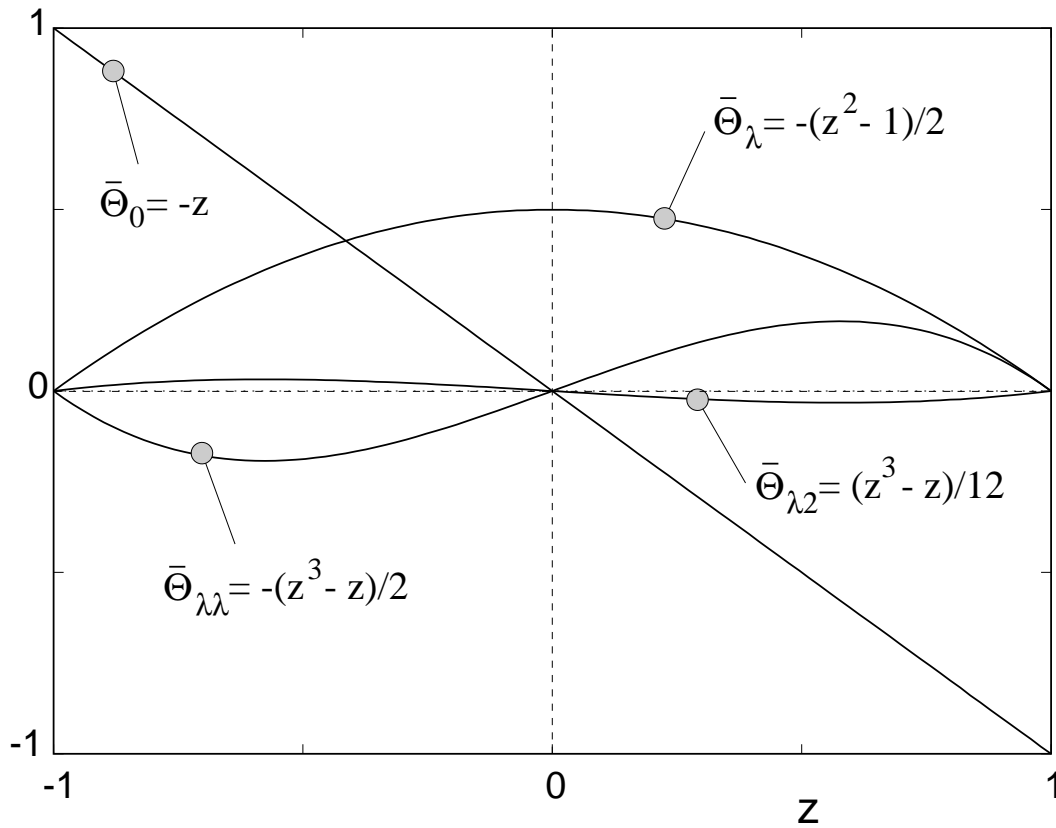


Abb. 3.2 : Analytische Lösungen der Gleichungen (3.4)–(3.8)

3.3 Stabilitätsanalyse der horizontalen beheizten Fluidschicht

Wird nur der Einfluß variabler Viskosität auf das Stabilitätsverhalten der Strömung untersucht, so kann das Gleichungssystem (2.32)–(2.35) auf ein System mit zwei Gleichungen für \hat{w} und $\hat{\Theta}$ reduziert werden.

$$\left\{ \left[\frac{\hat{\sigma}}{Pr} - \bar{\eta}(D^2 - k^2) - 2\bar{\eta}'D \right] (D^2 - k^2) - \bar{\eta}''(D^2 + k^2) \right\} \hat{w} = -\frac{Ra}{16} k^2 \hat{\Theta} \quad (3.9)$$

$$[\hat{\sigma} - (D^2 - k^2)] \hat{\Theta} = -D\bar{\Theta}\hat{w} \quad (3.10)$$

Hier ist die Bezugsgeschwindigkeit $\tilde{U}_B^* = a^*/H^*$ ($a^* = \lambda^*/\rho^*c_p^*$) an Stelle der üblichen Bezugsgeschwindigkeit (s.o.) eingeführt worden. Dies bringt den Vorteil, daß die Prandtl-Zahl nun in einem Term auftaucht, der, wie

sich noch herausstellen wird, identisch null ist. Da diese Bezugsgeschwindigkeit im folgenden benutzt werden soll, ändern sich die Kennzahlen K_1 – K_3 zu $K_1 = -Pr Ra / (16 \varepsilon K_\rho)$, $K_2 = Pr$ und $K_3 = 1$. Die Randbedingungen für (3.9) und (3.10) lauten:

$$z = \pm 1 : \quad \hat{w} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = \hat{\Theta} = 0 \quad (3.11)$$

Chandrasekhar (1961) hat gezeigt, daß das sogenannte **Prinzip vom Austausch der Stabilitäten** (engl.: Principle of exchange of stabilities) für das untersuchte System gültig ist. D.h. Der stabile Zustand der reinen Wärmeleitung (keine Konvektionsströmung) wird nach Überschreiten eines kritischen Wertes der Rayleigh-Zahl durch einen weiteren stabilen Zustand (Ausbildung stationärer Konvektionswalzen) ersetzt. Damit gilt für den Stabilitätsparameter $\hat{\sigma} = \sigma_r + 0i$ und auf der Indifferenzkurve $\hat{\sigma} = 0$. In der Gleichung (3.9) verschwindet der Term $\hat{\sigma}/Pr$ und alle Systemzustände auf der neutralen Kurve sind somit unabhängig von der Prandtl-Zahl.

3.3.1 Asymptotische Methode ($\eta = \eta(T)$)

Eine asymptotische Entwicklung der Stabilitätsgleichungen wird üblicherweise in der Form durchgeführt, daß neben den abhängigen Variablen \hat{w} und $\hat{\Theta}$ auch der Stabilitätsparameter $\hat{\sigma}$ in eine Reihe entwickelt wird (Herwig, Schäfer (1992)). Da hier jedoch lediglich die neutralen Zustände ($\hat{\sigma} = 0$) interessieren, ist es sinnvoller, die kritische Rayleigh-Zahl Ra_{krit} und die kritische Wellenzahl k_{krit} zu entwickeln. Dies kann physikalisch interpretiert werden als die Änderung der kritischen Rayleigh- und Wellenzahl für den Fall, daß die Viskosität temperaturabhängig ist. So erhält man auf relativ unkomplizierte Weise aus den entwickelten Gleichungen direkt die gesuchten Einflußfunktionen A_{ij} (hier Ra_{ij}), wohingegen Herwig und Schäfer (1992) erst eine aufwendige Auswertung ihrer für den Stabilitätsparameter gewonnenen Ergebnisse durchführen müssen. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Viskosität auf die

kritische Wellenzahl sehr gering ist. Damit kann eine Entwicklung der kritischen Wellenzahl vernachlässigt werden, womit lediglich kleine Fehler in den Ergebnissen für die kritische Rayleigh-Zahl in Kauf genommen werden.

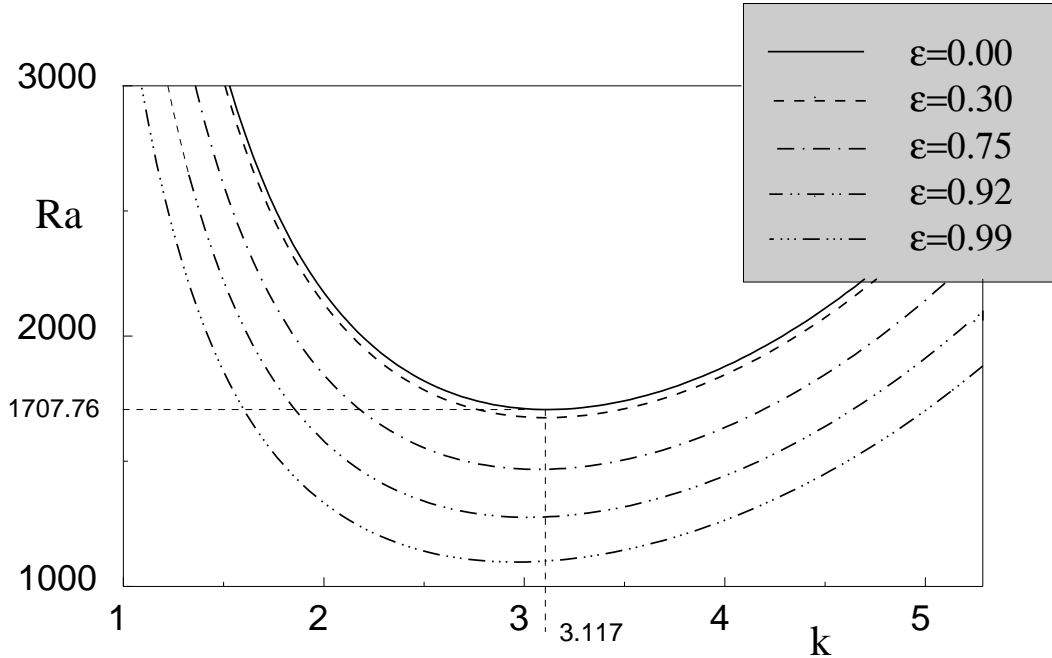


Abb. 3.3 : Indifferenzkurven der Rayleigh-Bénard-Konvektion für verschiedene Werte des Heizparameters ε (Lösung der Gleichungen (3.9) und (3.10) für ein lineares Stoffgesetz für die Viskosität $\bar{\eta} = 1 + \varepsilon K_\eta \bar{\Theta}$, $K_\eta = 1.0$)

Abbildung 3.3 zeigt die neutrale Kurve in Abhängigkeit von der Heizrate ε . Die Berechnungen sind mit einem linearen Stoffgesetz für die Viskosität durchgeführt worden. Die angesprochene geringe Variation der kritischen Wellenzahl ist gut zu sehen.

Nach Einsetzen der Stoffwertentwicklung

$$\bar{\eta} = 1 + \varepsilon K_\eta \bar{\Theta} + \varepsilon^2 K_{\eta 2} \frac{\bar{\Theta}^2}{2} \quad (3.12)$$

und der entsprechenden Entwicklungen der abhängigen Variablen \hat{w} , $\hat{\Theta}$ und jetzt auch Ra (Die oben gegebene physikalische Interpretation gilt für alle Zustände auf der neutralen Kurve) in die Gleichungen (3.9) und (3.10) ergibt sich bis zur 2. Ordnung einschließlich:

0. Ordnung:

$$\left[D^2 - k^2\right]^2 \hat{w}_0 - \frac{Ra_0}{16} k^2 \hat{\Theta}_0 = 0, \quad (3.13)$$

$$\left[D^2 - k^2\right] \hat{\Theta}_0 - \bar{\Theta}' \hat{w}_0 = 0. \quad (3.14)$$

1. Ordnung (εK_η -Effekt):

$$\begin{aligned} \left[D^2 - k^2\right]^2 \hat{w}_1 - \frac{Ra_0}{16} k^2 \hat{\Theta}_1 = \\ - \left\{ \left[\bar{\Theta} \left[D^2 - k^2\right] + 2\bar{\Theta}' D \right] \left[D^2 - k^2\right] + \bar{\Theta}'' \left[D^2 + k^2\right] \right\} \hat{w}_0 + \frac{Ra_1}{16} k^2 \hat{\Theta}_0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\left[D^2 - k^2\right] \hat{\Theta}_1 - \bar{\Theta}' \hat{w}_1 = 0. \quad (3.16)$$

2. Ordnung ($\varepsilon^2 K_\eta^2$ -Effekt):

$$\begin{aligned} \left[D^2 - k^2\right]^2 \hat{w}_{21} - \frac{Ra_0}{16} k^2 \hat{\Theta}_{21} = \\ - \left\{ \left[\bar{\Theta} \left[D^2 - k^2\right] + 2\bar{\Theta}' D \right] \left[D^2 - k^2\right] + \bar{\Theta}'' \left[D^2 + k^2\right] \right\} \hat{w}_1 \\ + \frac{Ra_1}{16} k^2 \hat{\Theta}_1 + \frac{Ra_{21}}{16} k^2 \hat{\Theta}_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\left[D^2 - k^2\right] \hat{\Theta}_{21} - \bar{\Theta}' \hat{w}_{21} = 0. \quad (3.18)$$

2. Ordnung ($\varepsilon^2 K_{\eta^2}$ -Effekt):

$$\begin{aligned} \left[D^2 - k^2\right]^2 \hat{w}_{22} - \frac{Ra_0}{16} k^2 \hat{\Theta}_{22} = \\ - \left\{ \left[\frac{\bar{\Theta}^2}{2} \left[D^2 - k^2\right] + 2\bar{\Theta}\bar{\Theta}' D \right] \left[D^2 - k^2\right] + (\bar{\Theta}'^2 + \bar{\Theta}\bar{\Theta}'') \left[D^2 + k^2\right] \right\} \hat{w}_0 \\ + \frac{Ra_{22}}{16} k^2 \hat{\Theta}_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$[D^2 - k^2] \hat{\Theta}_{22} - \bar{\Theta}' \hat{w}_{22} = 0. \quad (3.20)$$

Es gilt die Beziehung (3.11) für die Randbedingungen der einzelnen Ordnungen. Die Gleichungen 0. Ordnung sind identisch mit den üblichen Gleichungen bei Annahme der Boussinesq–Approximation. Die Gleichungen höherer Ordnungen beschreiben den Einfluß der Viskosität auf die Störgrößen. Die Lösung des Systems (3.13)–(3.20) und damit die Bestimmung der Einflußfunktionen Ra_{ij} verlangt eine sogenannte **Lösbarkeitsbedingung** (s. Anhang A) (Nayfeh (1993)). Eine Entwicklung der kritischen Rayleigh–Zahl bis zur 4. Ordnung ergibt

$$\begin{aligned} Ra_{krit} = & Ra_{krit,0} + \varepsilon K_\eta Ra_1 + \varepsilon^2 [K_\eta^2 Ra_{21} + K_{\eta 2} Ra_{22}] \\ & + \varepsilon^3 [K_\eta^3 Ra_{31} + K_\eta K_{\eta 2} Ra_{32} + K_{\eta 3} Ra_{33}] + \varepsilon^4 [K_\eta^4 Ra_{41} \\ & + K_\eta^2 K_{\eta 2} Ra_{42} + K_{\eta 2}^2 Ra_{43} + K_\eta K_{\eta 3} Ra_{44} + K_{\eta 4} Ra_{45}] + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Der Einfachheit halber ist hier ein numerischer Index $(1, 2, \dots)$ für die Einflußfunktionen Ra_{ij} eingeführt worden, da nur der Viskositätseffekt betrachtet wird. Die Lösungen des Systems (3.13)–(3.20), also die Einflußfunktionen A_{ij} , sind in der ersten Zeile der Tabelle 3.1 zu sehen. Zum Vergleich befinden sich die Ergebnisse aus einer Berechnung der Einflußfunktionen nach der kombinierten Methode (s. unten) in der zweiten Zeile, jetzt bis einschließlich zur 4. Ordnung.

Tabelle 3.1 : Vergleich der Einflußfunktionen Ra_{ij} nach (3.13)–(3.20) mit Ergebnissen aus der kombinierten Methode (Gleichungen (3.9), (3.10)); ($Ra_1 = Ra_{31} = Ra_{32} = Ra_{33} = 0$)

	Ra_{21}	Ra_{22}	Ra_{41}	Ra_{42}	Ra_{43}	Ra_{44}	Ra_{45}
asyp. Methode	-352,783	444,618	–	–	–	–	–
komb. Methode	-352,782	444,624	-87,66	176,19	-23,308	-96.032	24.776

Auffällig ist, daß die Einflußfunktionen für die ungeraden Ordnungen identisch null sind. Das liegt an der Symmetrie des Systems.

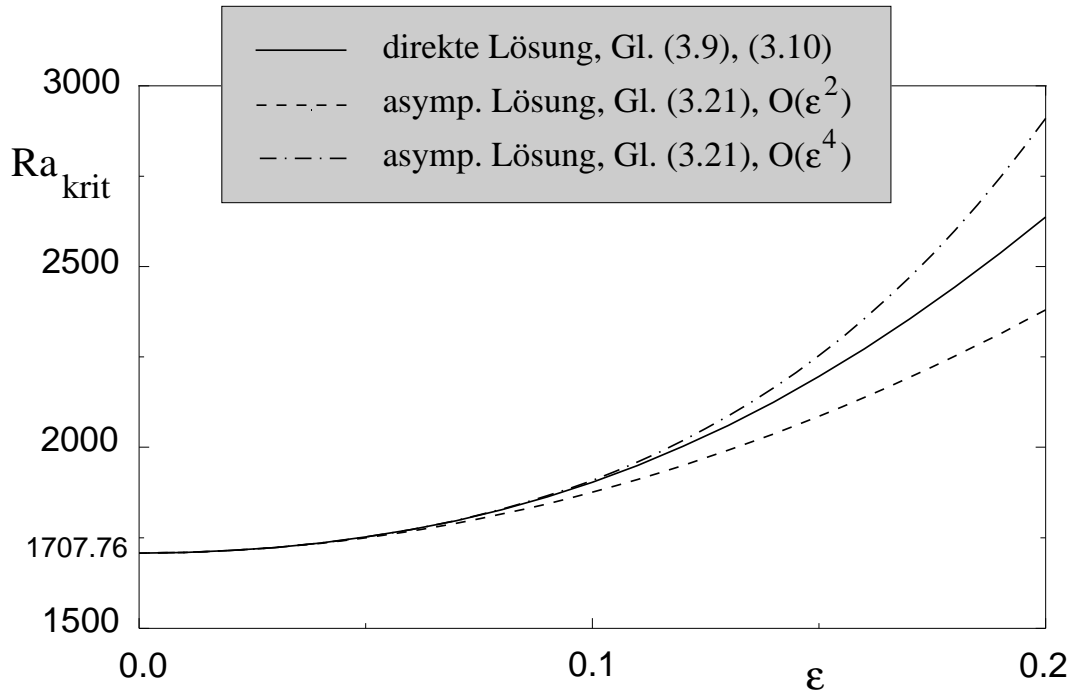


Abb. 3.4 : Kritische Rayleigh-Zahl als Funktion der Heizrate ε für ein quadratisches Stoffgesetz $\bar{\eta} = 1 + \varepsilon K_\eta \bar{\Theta} + \varepsilon^2 K_{\eta 2} \bar{\Theta}^2 / 2$ (mit $K_\eta = -7.132$, $K_{\eta 2} = 78.16$ (s. Tabelle 2.2))

Eine Auswertung der Ergebnisse aus Tabelle 3.1 für ein wasserähnliches Fluid ist in Abbildung 3.4 gezeigt. Dabei wurde zum Vergleich eine direkte Berechnung der Gleichungen (3.9) und (3.10) mit einem quadratischen Stoffgesetz durchgeführt. Wie zu erwarten war, ist die Übereinstimmung zwischen direkter Lösung und den asymptotischen Ergebnissen für kleine Werte von ε sehr gut. Die Hinzunahme der Terme 4. Ordnung in ε bringt noch einmal eine größere Genauigkeit. Da in den Ergebnissen die Stoffkonstanten von Wasser bei 293 K und 1 bar verwendet wurden, ist noch anzumerken, daß diese Ergebnisse bei Wasser nur bis zu $\varepsilon = 0.068$ gültig sind, da Wasser bei höheren Temperaturdifferenzen an der Oberseite der Fluidschicht gefrieren würde. Im nächsten Abschnitt wird der Einfluß aller Stoffwerte auf die kritische Rayleigh-Zahl mit der kombinierten Methode behandelt.

3.3.2 Kombinierte Methode ($\rho, \eta, \lambda, c_p = f(T)$)

Im vorangegangenen Abschnitt hat sich gezeigt, daß eine Entwicklung der Stabilitätsgleichungen für nur einen einzelnen Stoffwert schon recht aufwendig ist. Mit einer entsprechende Entwicklung für die anderen Stoffwerte erhält man einschließlich der Entwicklungen für die Dichte im Auftriebsterm schon 25 Gleichungen (bis zur 2. Ordnung). Dies ist leicht zu erkennen, wenn man die Entwicklung für die kritische Rayleigh-Zahl aufschreibt. Es gilt

$$\begin{aligned}
 Ra_{krit} &= Ra_{krit,0} \\
 &+ \varepsilon (K_\rho Ra_\rho + K_A Ra_A + K_\eta Ra_\eta + K_\lambda Ra_\lambda + K_c Ra_c) \\
 &+ \varepsilon^2 (K_\rho^2 Ra_{\rho\rho} + K_{\rho 2} Ra_{\rho 2} + K_\rho K_A Ra_{\rho A} + K_\rho K_\eta Ra_{\rho\eta} \\
 &\quad + K_\rho K_\lambda Ra_{\rho\lambda} + K_\rho K_c Ra_{\rho c} + K_A^2 Ra_{AA} + K_{A2} Ra_{A2} \\
 &\quad + K_A K_\eta Ra_{A\eta} + K_A K_\lambda Ra_{A\lambda} + K_A K_c Ra_{Ac} + K_\eta^2 Ra_{\eta\eta} \\
 &\quad + K_{\eta 2} Ra_{\eta 2} + K_\eta K_\lambda Ra_{\eta\lambda} + K_\eta K_c Ra_{\eta c} + K_\lambda^2 Ra_{\lambda\lambda} \\
 &\quad + K_{\lambda 2} Ra_{\lambda 2} + K_\lambda K_c Ra_{\lambda c} + K_c^2 Ra_{cc} + K_{c2} Ra_{c2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

mit $K_{A2} = K_{\rho 3}/K_\rho$. Um diesen großen Aufwand zu umgehen, wurde die kombinierte Methode zur Bestimmung der Koeffizienten Ra_{ij} angewandt. Dabei wird z.B. der Wert für $Ra_{\rho\eta}$ durch den Differenzenquotienten nach (2.48) näherungsweise berechnet. Tabelle 3.2 enthält die nach der kombinierten Methode bestimmten Werte für Ra_{ij} . In Abbildung 3.5 sind die Einflüsse der Stoffwerte auf die kritische Rayleigh-Zahl separat abgebildet. Dabei sind die Ergebnisse entsprechend Gleichung (3.22) zusammengesetzt worden. Die Stoffkennzahlen für $T_B^* = 293K$, $p_B^* = 1bar$ sind in Tabelle 2.2 angegeben. Es ist gut zu sehen, daß für den abgebildeten Fall (Luft) die Effekte der einzelnen Stoffwerte sehr unterschiedlich sind, und es keinen Sinn macht, im Falle von Gasen lediglich den Einfluß der Viskosität zu betrachten, wie es verschiedene Autoren gemacht haben. Der Dichteinfluß ist mit Berechnungen von Fröhlich et al. (1992) verglichen worden, die für diesen Stoffwerteinfluß das ideale Gasgesetz verwendeten.

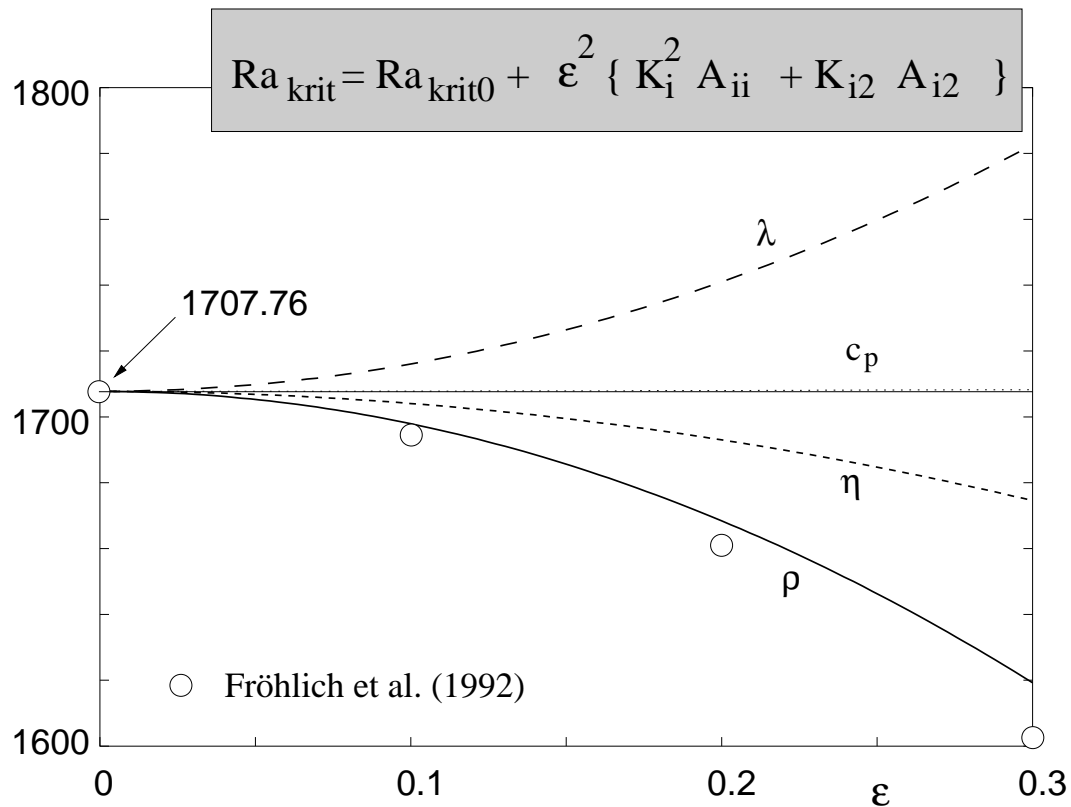


Abb. 3.5 : Einflüsse der verschiedenen Stoffwerte auf die kritische Rayleigh-Zahl für verschiedene Heizraten ε bis zur 2. Ordnung nach Gleichung (3.22), (Luft bei $T_B^* = 293K$, $p_B^* = 1bar$)

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Fröhlich et al. (1992) zeigt, daß die Entwicklung bis zur 2. Ordnung schon den wesentlichen Effekt in Bezug auf den Einfluß temperaturabhängiger Dichte erfaßt.

Tabelle 3.2 : Einflußfunktionen Ra_{ij} nach der kombinierten Methode (Gleichungen (2.32)–(2.35))

Ra_{ij}		j					
		ρ	A	η	λ	c_p	2
i	ρ	-12,96	-103.76	153.76	-457.60	-203.76	-88.88
	A	–	-12.96	153.76	-457.60	-103.76	-88.88
	η	–	–	352.78	101.76	153.76	444.64
	λ	–	–	–	1044.80	-457.60	-8.96
	c_p	–	–	–	–	-12.96	-88.88

3.3.3 Vergleich mit anderen Arbeiten

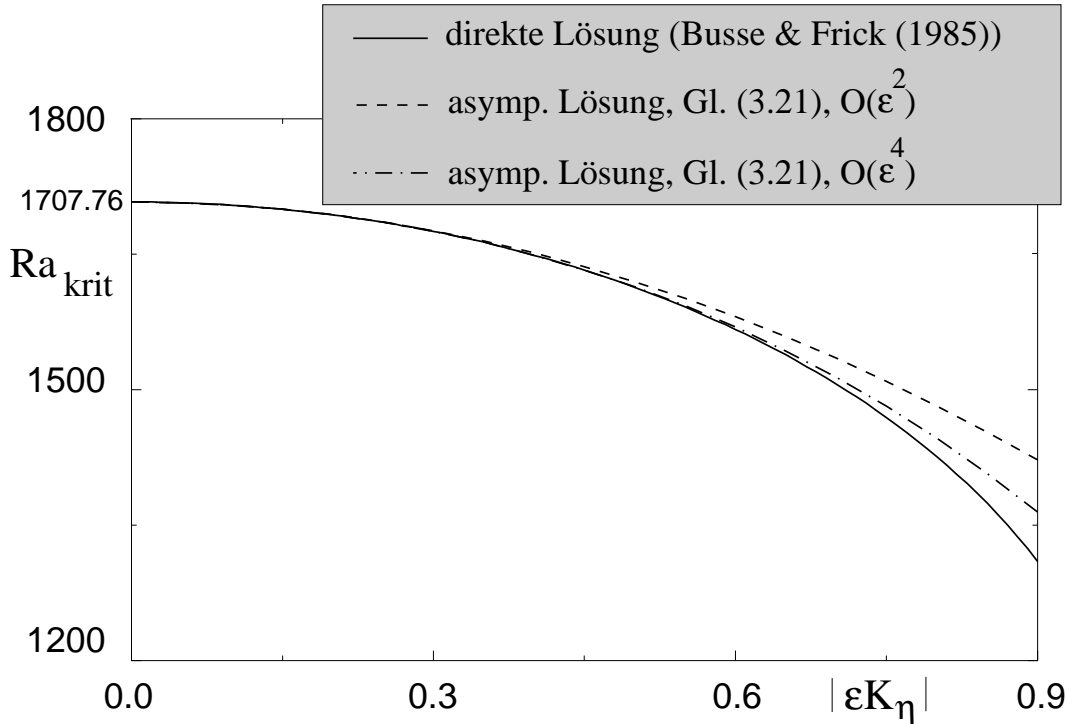


Abb. 3.6 : *Einfluß der Viskosität auf die kritische Rayleigh-Zahl für verschiedene Heizraten ε nach Gleichung (3.21), lineares Stoffgesetz $\eta = 1 + \varepsilon K_\eta \bar{\Theta}$*

Abschließend wird ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren durchgeführt, um die Allgemeingültigkeit der berechneten Beziehung für Ra_{krit} zu testen. Busse und Frick (1985) berechneten die Stabilität der Rayleigh–Bénard–Konvektion unter Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Temperatur und Viskosität ($\eta^* = \eta_0^* (1 - \gamma (T^* - T_B^*))$). Dies entspricht exakt der Entwicklung $\eta = 1 + \varepsilon K_\eta \bar{\Theta}$ und stellt daher eine gute Vergleichsmöglichkeit dar. Die asymptotischen Lösungen (3.21) sind in Abbildung 3.6 mit den Ergebnissen von Busse und Frick (1985) verglichen. Auch hier ist gute Übereinstimmung festzustellen, wobei die asymptotische Lösung 4. Ordnung noch einmal eine deutliche Verbesserung bringt.

Stengel et al. (1982) untersuchten ein Fluid mit exponentieller Temperaturabhängigkeit der Viskosität. Aus den Angaben zu ihren Messungen der Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur läßt sich die folgende Ausgleichskurve

berechnen:

$$\eta^* = \exp [4.79057 - 0.123556T^* + 9.11174 \cdot 10^{-4}T^{*2} - 4.75608 \cdot 10^{-6}T^{*3} + 1.32951 \cdot 10^{-8}T^{*4}] , \quad ([T^*] = ^\circ C) . \quad (3.23)$$

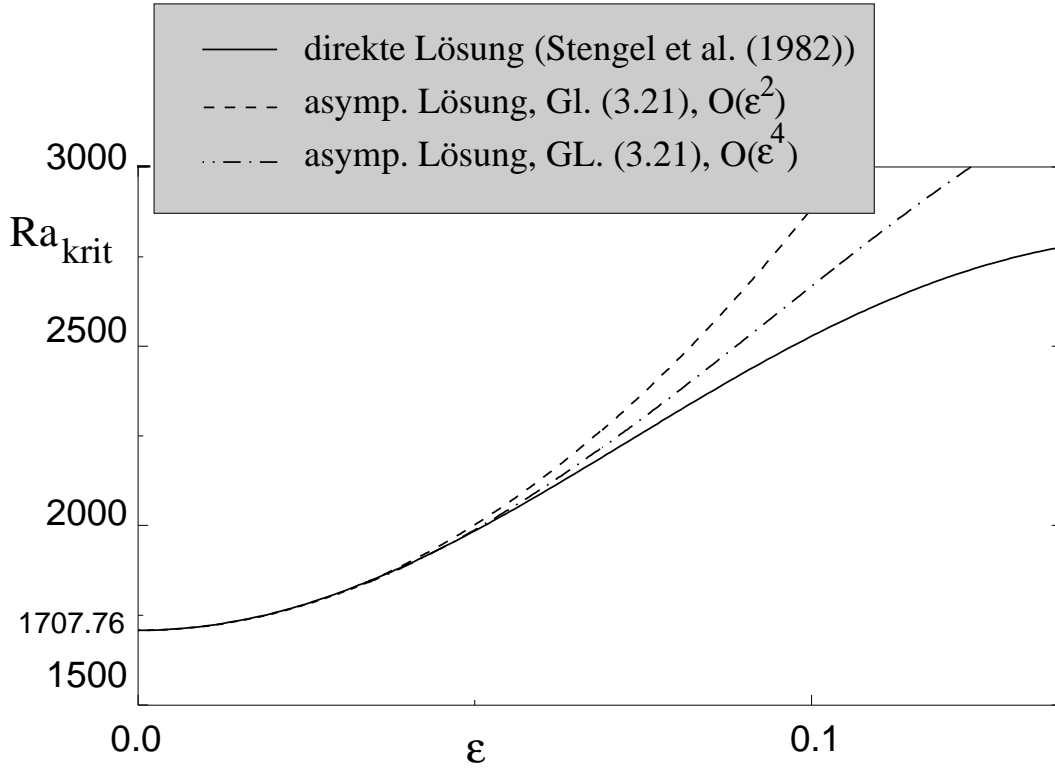


Abb. 3.7 : *Einfluß der Viskosität auf die kritische Rayleigh-Zahl für verschiedene Heizraten ε nach Gleichung (3.21), exponentielles Stoffgesetz nach Stengel et al. (1982) ($T_B^* = 293K$, $p_B^* = 1bar$)*

Aus dieser Beziehung lassen sich die Stoffkonstanten für eine Referenztemperatur von $T_B^* = 293K$ zu $K_\eta = -27.07$, $K_{\eta 2} = 846.61$, $K_{\eta 3} = -29611.47$, $K_{\eta 4} = 1.13683 \cdot 10^6$ bestimmen, die für Gleichung (3.21) gebraucht werden. Abbildung 3.7 zeigt einen Vergleich der Ergebnisse.

Eine interessante Berechnung stammt von Fröhlich et al. (1992). Sie analysierten die Stabilität der Rayleigh–Bénard–Konvektion mittels eines Modells, welches die Abweichungen von der Boussinesq–Approximation für kleine Machzahlen erfaßt (eng: **low mach number equations**) für Luft bei $300K$. Sie wiesen darauf hin, daß im Gegensatz zu den offenen Systemen, wie Grenzschichtströmungen

oder Kanalströmungen, im Modell der Rayleigh–Bénard–Konvektion kein Massentransport über die Grenzen des Systems stattfindet.

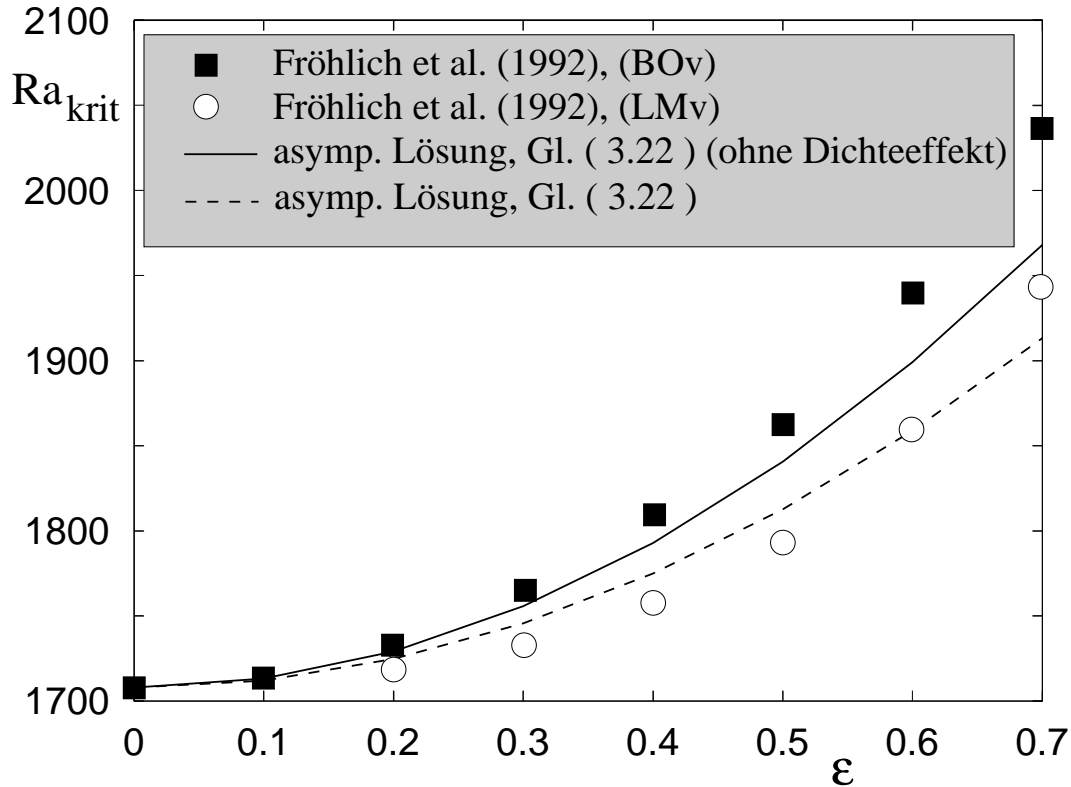


Abb. 3.8 : Kritische Rayleigh-Zahl als Funktion der Heizrate ε nach Gleichung (3.22) (Luft: $T_B^* = 300K$, $p_B^* = 1bar$). Vergleich mit Ergebnissen von Fröhlich et al. (1992)

Die Dichteänderung eines Fluides mit der Temperatur hat daher immer eine Änderung des Druckes im System zur Folge, sofern nicht das Volumen der Fluidschicht geändert wird. Fröhlich et al. schlugen daher vor, einen Quellterm in der Kontinuitätsgleichung einzuführen, der die infolge der veränderten Dichte eintretende Druckänderung kompensiert. Dadurch kann die Druckabhängigkeit der Stoffwerte vernachlässigt werden.

In Abbildung 3.8 sind Ergebnisse nach Gleichung (3.22) mit den Berechnungen von Fröhlich et al. verglichen worden. Die Ergebnisse von Fröhlich et al. sind unter der Annahme konstanter spezifischer Wärmekapazität mit den Stoffgesetzen

$$\frac{\eta^*}{\eta_B^*} = \left(\frac{T^*}{T_B^*} \right)^{1.5} \frac{T_B^* + S_\eta^*}{T^* + S_\eta^*}, \quad \frac{\lambda^*}{\lambda_B^*} = \left(\frac{T^*}{T_B^*} \right)^{1.5} \frac{T_B^* + S_\lambda^*}{T^* + S_\lambda^*} \quad (3.24)$$

(Sutherland Formeln; $S_\eta^* = 110.4K$, $S_\lambda^* = 194.4K$) für die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit, sowie der idealen Gasgleichung für die Dichte berechnet worden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Der Fall BOv entspricht einer Berechnung der kritischen Rayleigh–Zahl mit variabler Viskosität und Wärmeleitfähigkeit, jedoch konstanter Dichte; Der Fall LMv beinhaltet zusätzlich den Einfluß temperaturabhängiger Dichte. Es zeigt sich auch hier, daß die asymptotisch gewonnenen Ergebnisse (Aus den Stoffgesetzen ergeben sich die Stoffkennzahlen zu: $K_\rho = -1$, $K_{\rho 2} = 2$, $K_{\rho 3} = 6$, $K_\eta = 0.769$, $K_{\eta 2} = -0.374$, $K_\lambda = 0.893$, $K_{\lambda 2} = -0.339$) nach Gleichung (3.22) sehr gut mit den Berechnungen für konkrete Stoffgesetze übereinstimmen. Es sei noch angemerkt, daß der etwas andere Kurvenverlauf für den LMv–Fall, verglichen mit der entsprechenden asymptotischen Lösung darin begründet liegt, daß Fröhlich et al. hier die Druckkorrektur als Zusatzterm in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt haben. Für kleine Temperaturdifferenzen ($\varepsilon \rightarrow 0$) ist dieser Effekt jedoch vernachlässigbar.

3.4 Zusammenfassung

Für die kritische Rayleigh–Zahl für Fluide mit temperaturabhängigen Stoffwerten ist eine allgemeingültige Beziehung in Form einer asymptotischen Reihe angegeben worden. Die Ergebnisse, welche mit der asymptotischen Methode und der kombinierten Methode errechnet wurden, zeigen asymptotisch kleine Abweichungen von exakten Ergebnissen für konkrete Stoffe. Für endliche Werte von ε können die gewonnenen Resultate als gute Approximationen angesehen werden.

Aus den asymptotischen Ergebnissen können die folgenden Schlußfolgerungen gezogen werden.

- Die kritische Rayleigh–Zahl ist eine gerade Funktion von ε , wie man folgendermaßen sieht: Ein Wechsel im Vorzeichen von ε bei ein und demselben Fluid würde nur zu dem hier betrachteten Stabilitätsproblem führen, wenn gleichzeitig auch der Schwerkraftvektor \vec{g} das Vorzeichen wechseln würde.

Dies wiederum ist nichts anderes als eine Rotation des gesamten Systems um 180° , was dieselbe Situation wie vorher darstellt.

- Bei Fluiden, die lediglich eine lineare Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur aufweisen, beginnt die Konvektion früher als bei Fluiden mit konstanter Viskosität (Abbildung 3.6), unabhängig vom Vorzeichen des Viskositätsgradienten.

Mit Hilfe der Gleichung (3.21) können Fluide, die starke Viskositätsänderungen aufweisen, bezüglich ihres Stabilitätsverhaltens unterteilt werden. Diese Unterteilung ist in Abbildung 3.9 grafisch dargestellt. Die Darstellung 3.9 gilt für Fluide mit dominantem Viskositätseinfluß und bezieht sich auf das Verhalten der kritischen Rayleigh-Zahl für kleine Heizraten ε , da dann Effekte höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Fluide, die im grau eingefärbten Bereich anzusiedeln sind, bilden später eine Konvektionsströmung aus als die, welche in dem Bereich oberhalb liegen.

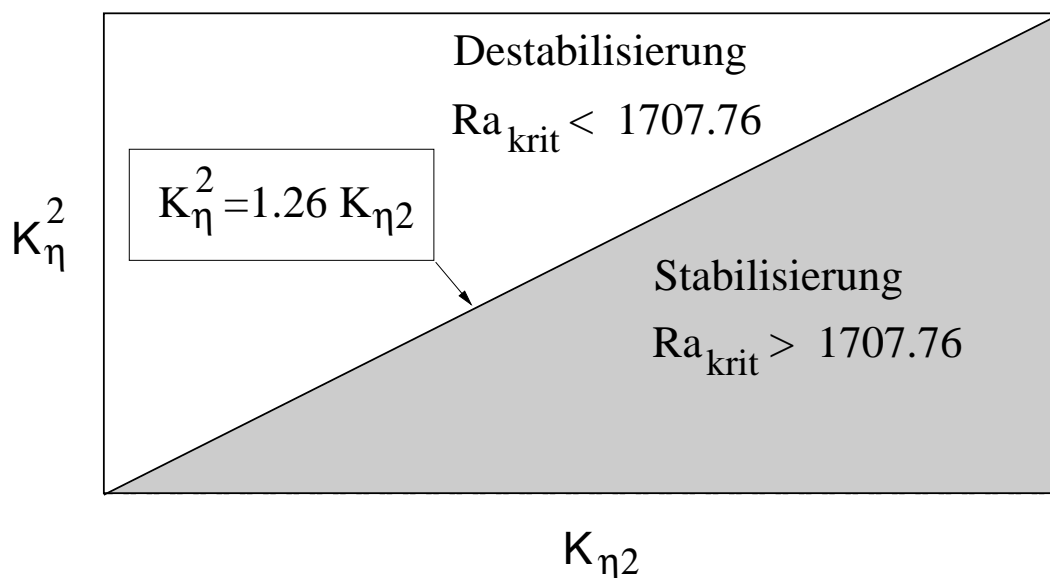


Abb. 3.9 : Schematische Skizze zur Einordnung des Stabilitätsverhaltens von Fluiden mit starker Viskositäts-Temperatur-Relation

4 Stabilität der Strömung an der vertikalen beheizten Platte; stark gekoppeltes Problem

4.1 Vorbemerkungen

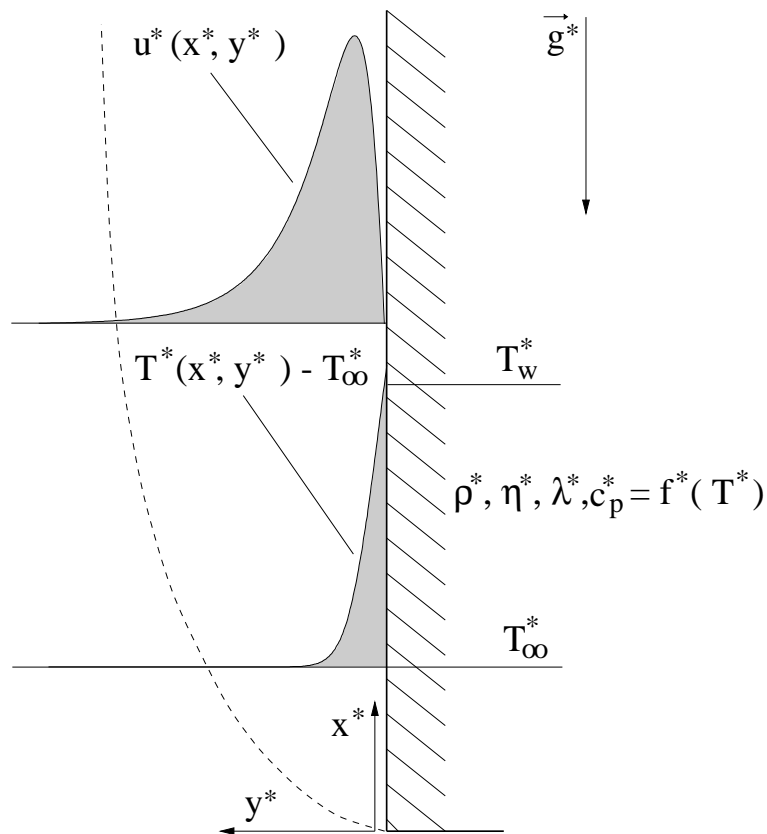


Abb. 4.1 : *Schematische Darstellung der Grenzschichtströmung an der vertikalen beheizten Platte*

Betrachtet wird die natürliche Konvektionsströmung an der vertikalen beheizten Platte nach Abbildung 4.1. Wie bei der Rayleigh–Bénard–Konvektion kommt es auch an der beheizten Platte zur Ausbildung eines Dichtegradienten. Dieser hat eine parallel zur Platte der Schwerkraft entgegen wirkende Auftriebskraft

zur Folge. Die erhöhte Wandtemperatur bewirkt eine Abnahme der Dichte des Fluides im wandnahen Bereich. Das dadurch gegenüber der Umgebung leichtere Fluid steigt an der Wand auf. Das entstehende Strömungsfeld und auch das Temperaturfeld haben Grenzschichtcharakter ($Gr \rightarrow \infty$) und werden durch die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen (s.u.) beschrieben.

Da dieser Typ Strömung durch die Temperaturabhängigkeit der Dichte des Fluides zustande kommt und damit schon Folge eines Effektes variabler Stoffwerte ist, gehört auch er zu den stark gekoppelten Systemen.

Eine der ersten analytischen Untersuchungen zur Stabilität dieser Strömung, die sowohl die Kopplung zwischen Strömungsfeld und Temperaturfeld in der Grundströmung als auch in der Schwankungsbewegung berücksichtigte, ist von Nachtsheim (1963) durchgeführt worden. Die Arbeit befaßt sich mit der zeitlichen Analyse des Anfachungsverhaltens kleiner Störungen in der Grenzschichtströmung an der beheizten Platte bei konstanter Wandtemperatur. Kritische Grashof-Zahlen gibt Nachtsheim zu $Gr_{krit} = 62.49$ ($Pr = 0.733$) und $Gr_{krit} = 34.0$ ($Pr = 6.7$) an. Weitere Untersuchungen sind von Hieber und Gebhart (1971), Gebhart und Mahajan (1982) sowie Jaluria und Gebhart (1974) angestrengt worden. Die Mehrzahl aller Analysen bezog sich jedoch auf Strömungen mit konstantem Wandwärmestrom ($q_w^* = \text{konst.}$) bzw. auf Strömungen, deren Umgebung eine vorgegebene Temperaturschichtung aufweist. Allen genannten analytischen Arbeiten liegt die Boussinesq-Approximation zugrunde. Auch experimentelle Arbeiten sind für die Randbedingung $q_w^* = \text{konst.}$ in umfangreichem Maße durchgeführt worden (Godaux und Gebhart (1974), Jaluria und Gebhart (1974), Qureshi und Gebhart (1978)). Die Experimente zeigen in guter Übereinstimmung mit der Theorie (lineare primäre Stabilitätstheorie), daß natürliche Störungen mit einer dominanten Frequenz angefacht werden, die der am stärksten angefachten Frequenz bei der Orr-Sommerfeld Analyse entspricht.

Eine der wenigen Arbeiten, die Effekte variabler Stoffwerte in mehr oder weniger systematischer Weise behandelt, ist von Sabhapathy und Cheng (1986). Sie

untersuchten den Einfluß temperaturabhängiger Viskosität und des thermischen Expansionskoeffizienten auf das Stabilitätsverhalten der natürlichen Konvektionsströmung in einem Prandtl-Zahlenbereich von $Pr = 7$ bis $Pr = 10$. Eine weitere Arbeit von Jang und Mollendorf (1988) befaßt sich in gleicher Weise mit dem Effekt der temperaturabhängigen Viskosität, ohne jedoch auf die Arbeit von Sabhapathy und Cheng einzugehen.

In einer Arbeit von Brooker (1996) ist der Effekt der Nichtparallelität der Strömung auf die Stabilität untersucht worden. Dabei wurden die Anfachungsraten für das Störungsproblem mit einer sogenannten **modifizierten PSE-Gleichung** berechnet. Die Ergebnisse sind mit einer direkten numerischen Simulation (DNS) verglichen worden und zeigen gute Übereinstimmung. Eine vollständige PSE-Analyse, d.h. eine vollständige nichtlokale nichtparallele Analyse des Problems steht jedoch noch aus, da es sich bei den modifizierten PSE-Gleichungen von Brooker lediglich um eine Erweiterung der Gleichungen zur Bestimmung lokaler Lösungen handelt (s.u.).

In diesem Kapitel wird der Einfluß der Temperaturabhängigkeit aller Stoffwerte (ρ , η , λ , c_p) auf die Störgrößenentwicklung analysiert. Dabei werden die einzelnen Effekte mittels der schon erläuterten Methode der asymptotischen Entwicklung sauber voneinander getrennt. Die Untersuchungen basieren zunächst auf der lokalen parallelen Stabilitätsanalyse und werden im zweiten Abschnitt dann ausgedehnt auf die nichtlokale nichtparallele Analyse (PSE-Analyse).

4.2 Grundströmung

Für die laminare Grenzschicht an der vertikalen beheizten Platte lauten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und thermische Energie (s. Herwig et al. (1985)):

$$\frac{\partial(\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v)}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{g^* L_B^*}{U_B^{*2}} (1 - \bar{\rho}) \quad (4.2)$$

$$\bar{\rho} \bar{c}_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} + \bar{u} r \frac{\bar{\Theta}}{x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} \right) \quad (4.3)$$

Die Randbedingungen lauten

$$y = 0 \quad : \quad \bar{u} = \bar{v} = \bar{\Theta} - 1 = 0,$$

$$y \rightarrow \infty \quad : \quad \bar{u} = \bar{\Theta} = 0.$$

Die dimensionslosen Größen der Gleichungen (4.1)–(4.3) sind mit der Bezugsgeschwindigkeit U_b^* , der Bezugslänge L_b^* und den Stoffwerten im Bezugszustand ρ_b^* , μ_b^* , λ_b^* , c_{pb}^* entdimensioniert. Dem Grenzschichtcharakter der Strömung ist zusätzlich Rechnung getragen durch die Streckung der y -Koordinate ($y = (y^*/L_b^*)(L_b^* U_b^*/\nu_b^*)^{1/2}$) und der Querkomponente \bar{v} der Strömungsgeschwindigkeit ($\bar{v} = (v^*/U_b^*)(L_b^* U_b^*/\nu_b^*)^{1/2}$). Für die Bezugstemperaturdifferenz $T_w^*(x^*) - T_\infty^*$ wird eine Potenzfunktion $\Delta_b T^* = (T_w^* - T_\infty^*)_b (x^*/L_b^*)^r$ gewählt (Näheres dazu: s. Herwig et al. (1985))

Durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\eta_s = \frac{x^{(r-1)/4}}{\sqrt{2}} y \quad (4.4)$$

sowie die Definition einer geeigneten Stromfunktion ($\partial \Psi / \partial y = \bar{\rho} \bar{u}$, $\partial \Psi / \partial x = -\bar{\rho} \bar{v}$)

$$\Psi = 2\sqrt{2} x^{(r+3)/4} f(\eta_s, x) \quad (4.5)$$

können die Gleichungen (4.1)–(4.3) umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \left(\bar{\eta} \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right)' \right)' + (3+r) f \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right) - (2+2r) \frac{f'^2}{\bar{\rho}} + \frac{g^* L_b^*}{U_b^{*2}} (1 - \bar{\rho}) \frac{1}{x^r} = \\ 4x \left(f' \frac{\partial (f'/\bar{\rho})}{\partial x} - \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right)' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$(\bar{\lambda}\bar{\Theta}')' + Pr\bar{c}_p((3+r)f\bar{\Theta}' - 4rf'\bar{\Theta}) = 4Pr\bar{c}_p x \left(f' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} - \bar{\Theta}' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (4.7)$$

An den Rändern gilt nun:

$$\eta_s = 0 : \quad f = f' = \bar{\Theta} - 1 = 0 ; \quad \eta_s \rightarrow \infty : \quad f' = \bar{\Theta} = 0$$

' bedeutet hier die partielle Ableitung nach η_s . Die Gleichungen (4.6) und (4.7) beschreiben die laminare Grenzschichtströmung an der senkrechten beheizten Platte mit variablen Stoffwerten. Sie gelten für beliebige Strömungen (keine Einschränkung auf selbstähnliche Strömungen), die durch eine Temperaturverteilung $T_w^* \sim x^{*r}$ auf der Oberfläche der vertikalen Platte zustandekommen. Lediglich Dissipationseffekte sind hier vernachlässigt worden.

4.2.1 Asymptotische Entwicklung

Das Lösen der Gleichungen (4.6), (4.7) erfordert üblicherweise die Festlegung der Stoffgesetze für die Stoffwerte $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$, \bar{c}_p , $\bar{\lambda}$. Da das System (4.6), (4.7) ein partielles Differentialgleichungssystem ist, ist es in dieser Form nur mit großem numerischen Aufwand lösbar. Eine starke Vereinfachung ergibt sich durch die schon in Kapitel 2 und 3 vorgestellte asymptotische Entwicklung der obigen Gleichungen. Aufgrund der erwähnten x -Abhängigkeit des Problems, und insbesondere aufgrund des Potenzgesetzes für die Temperaturverteilung der Wandtemperatur wird hier ein modifizierter Ansatz für die Stoffwerte gewählt (s. Herwig et al. (1985)).

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= 1 + \varepsilon x^r K_\rho \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^{2r} K_{\rho 2} \bar{\Theta}^2 + \dots \\ \bar{\mu} &= 1 + \varepsilon x^r K_\mu \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^{2r} K_{\mu 2} \bar{\Theta}^2 + \dots \\ \bar{c}_p &= 1 + \varepsilon x^r K_c \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^{2r} K_{c 2} \bar{\Theta}^2 + \dots \\ \bar{\lambda} &= 1 + \varepsilon x^r K_\lambda \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^{2r} K_{\lambda 2} \bar{\Theta}^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für den Auftriebsterm (s. Gleichung 4.6) ergibt sich unter Berücksichtigung der Entwicklung für die Dichte (4.8)

$$\frac{g^* L_b^*}{U_b^{*2}} (1 - \bar{\rho}) \frac{1}{x^r} = -\frac{g^* L_b^*}{U_b^{*2}} \left(\varepsilon K_\rho \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^r K_{\rho 2} \bar{\Theta}^2 + \dots \right). \quad (4.9)$$

Mit der Bezugsgeschwindigkeit $U_b^* = \sqrt{L_b^* g^* \beta_b^* \Delta_b T^*}$ und der Beziehung $\beta_b^* \Delta_b T^* = -\varepsilon K_\rho$ (Gersten/Herwig (1992)) kann dieser dann als

$$\frac{g^* L_b^*}{U_b^{*2}} (1 - \bar{\rho}) \frac{1}{x^r} = \bar{\Theta} + \frac{1}{2} \varepsilon x^r K_{\rho A} \bar{\Theta}^2 + \dots \quad (4.10)$$

geschrieben werden. $K_{\rho A}$ ist hierbei die Kombination $K_{\rho 2}/K_\rho$. Durch diese spezielle Wahl der Bezugsgeschwindigkeit ist sichergestellt, daß Gleichung (4.6) für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht entartet (Auftriebsterm verschwindet nicht). Im Rahmen der asymptotischen Entwicklung stellt der Grenzfall $\varepsilon = 0$ den Fall der natürlichen Konvektionsströmung mit konstanten Stoffwerten dar. Dieser Fall wird in der Literatur als Boussinesq-Approximation bezeichnet (s. Kapitel 3).

Analog zu den Stoffgesetzentwicklungen (4.8) werden folgende Ansätze für $f(\eta_s, x)$ und $\bar{\Theta}(\eta_s, x)$ gewählt:

$$f = f_0 + \varepsilon x^r (K_\rho f_\rho + K_{\rho A} f_{\rho A} + K_\eta f_\eta + K_c f_c + K_\lambda f_\lambda) + \mathcal{O}((\varepsilon x^r)^2), \quad (4.11)$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_0 + \varepsilon x^r (K_\rho \bar{\Theta}_\rho + K_{\rho A} \bar{\Theta}_{\rho A} + K_\eta \bar{\Theta}_\eta + K_c \bar{\Theta}_c + K_\lambda \bar{\Theta}_\lambda) + \mathcal{O}((\varepsilon x^r)^2). \quad (4.12)$$

(4.11) und (4.12) werden zusammen mit den Ansätzen für die Stoffgesetze (4.8) in die Gleichungen (4.6), (4.7) eingesetzt, und man erhält nach Separation der einzelnen Ordnungen ein Gleichungssystem, bestehend aus 12 Differentialgleichungen zur Bestimmung der Lösungen 0. Ordnung $f_0, \bar{\Theta}_0$ (konstante Stoffwerte) sowie der Lösungen 1. Ordnung, der sogenannten Einflußfunktionen $f_\rho, \dots, \bar{\Theta}_\rho, \dots$.

$$f_0''' + (3 + r) f_0 f_0'' - (2 + 2r) f_0'^2 + \bar{\Theta}_0 = 0 \quad (4.13)$$

$$\bar{\Theta}_0'' + Pr \left((3 + r) f_0 \bar{\Theta}_0' - 4r f_0' \bar{\Theta}_0 \right) = 0 \quad (4.14)$$

$$L_1(f_\rho, \bar{\Theta}_\rho) = (\bar{\Theta}_0' f_0')' + \bar{\Theta}_0' (f_0'' + (3 + r) f_0 f_0') - 4r \bar{\Theta}_0 f_0'^2 - \bar{\Theta}_0^2 \quad (4.15)$$

$$L_1(f_{\rho A}, \bar{\Theta}_{\rho A}) = -\frac{1}{2} \bar{\Theta}_0^2 \quad (4.16)$$

$$L_1(f_\eta, \bar{\Theta}_\eta) = -(\bar{\Theta}_0 f_0'')' \quad (4.17)$$

$$L_1(f_c, \bar{\Theta}_c) = 0 \quad (4.18)$$

$$L_1(f_\lambda, \bar{\Theta}_\lambda) = 0 \quad (4.19)$$

$$E_1(f_\rho, \bar{\Theta}_\rho) = 0 \quad (4.20)$$

$$E_1(f_{\rho A}, \bar{\Theta}_{\rho A}) = 0 \quad (4.21)$$

$$E_1(f_\eta, \bar{\Theta}_\eta) = 0 \quad (4.22)$$

$$E_1(f_\lambda, \bar{\Theta}_\lambda) = -(\bar{\Theta}_0 \bar{\Theta}_0')' \quad (4.23)$$

$$E_1(f_c, \bar{\Theta}_c) = \bar{\Theta}_0 \bar{\Theta}_0'' \quad (4.24)$$

Die Operatoren L_1 , E_1 sind als

$$L_1(f, \bar{\Theta}) = f''' + (3 + r) [f'' f_0 + f_0'' f] - 4(1 + 2r) f_0' f' + \bar{\Theta} + 4r f_0'' f, \quad (4.25)$$

$$E_1(f, \bar{\Theta}) = \bar{\Theta}'' + Pr \left[(3 + r) [f \bar{\Theta}_0' + f_0 \bar{\Theta}'] - 4r [2f_0' \bar{\Theta} + f' \bar{\Theta}_0 - \bar{\Theta}_0' f] \right] \quad (4.26)$$

definiert. Die Randbedingungen für den Fall $T_w = \text{konst.}$ lauten

$$\begin{aligned} \eta_s = 0 \quad : \quad f_0 = f_0' = \bar{\Theta}_0 - 1 = 0 ; \quad f_i = f_i' = \bar{\Theta}_i = 0, \\ (i = \rho, \rho A, \eta, c, \lambda), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\eta_s \rightarrow \infty : f'_0 = \bar{\Theta}_0 = 0; f'_i = \bar{\Theta}_i = 0, (i = \rho, \rho A, \eta, c, \lambda). \quad (4.28)$$

Für den Fall $q_w = \text{konst.}$ ergeben sich die Randbedingungen zu

$$\eta_s = 0 : f_0 = f'_0 = \bar{\Theta}_0 - 1 = 0; f_i = f'_i = \bar{\Theta}_i = 0; \bar{\Theta}_j - \bar{\Theta}_0 = 0, \quad (4.29)$$

$$(i = \rho A, \eta, c; j = \rho, \lambda),$$

$$\eta_s \rightarrow \infty : f'_0 = \bar{\Theta}_0 = 0; f'_i = \bar{\Theta}_i = 0; (i = \rho, \rho A, \eta, c, \lambda). \quad (4.30)$$

Die Gleichungen (4.13)–(4.24) sind gewöhnliche Differentialgleichungen, die sich nunmehr mit einem einfachen numerischen Verfahren, z.B. mit einem Runge–Kutta–Verfahren sukzessiv lösen lassen. Bild 4.2 zeigt Lösungen dieser Gleichungen für eine Prandtl–Zahl $Pr = 7.0$ und die thermische Randbedingung $T_w = \text{konst.}$

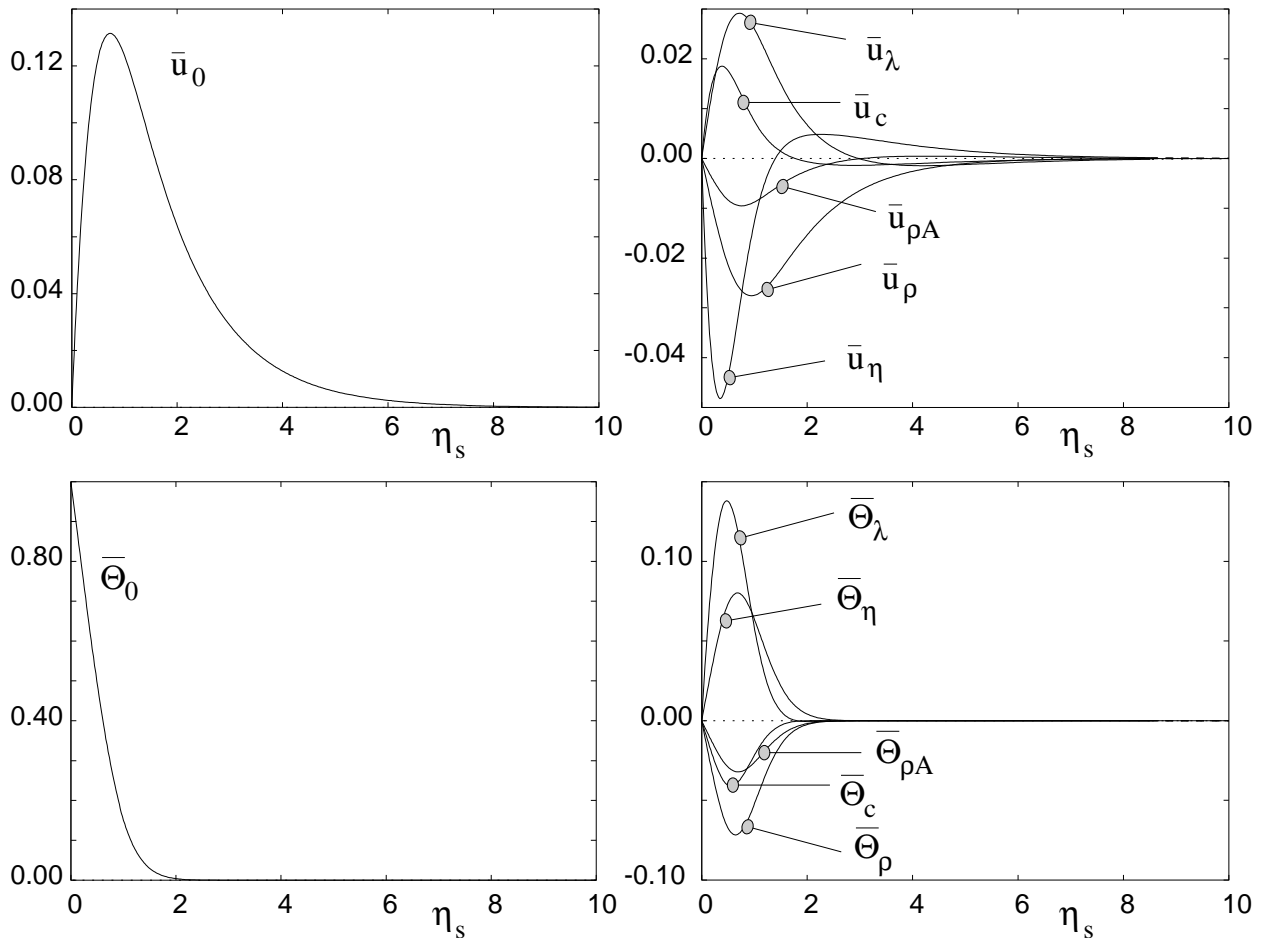


Abb. 4.2 : Lösungen der Gleichungen (4.13)–(4.24) ($Pr = 7.0$, $T_w = \text{konst.}$)

Die Ergebnisse für die Einflußfunktionen $\bar{u}_\rho, \bar{u}_{\rho A}, \dots, \bar{\Theta}_\rho, \bar{\Theta}_{\rho A}, \dots$ sind universell gültig für beliebige Stoffe mit der Prandtl-Zahl $Pr = 7.0$.

4.3 Lokale parallele Stabilitätsanalyse der Strömung an der senkrechten beheizten Platte

Für die lokale parallele Stabilitätsanalyse der natürlichen Konvektionsströmung an der senkrechten beheizten Platte sind die Stabilitätsgleichungen in Kapitel 2.2.3 zu

$$[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \vec{\Psi} = \{0, 0, 0\}^T \quad (4.31)$$

angegeben. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} y = 0 \quad : \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta} = 0 \quad (T_w = \text{konst.}) , \\ \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta}' = 0 \quad (q_w = \text{konst.}) , \\ y \rightarrow \infty \quad : \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta} = 0 \quad (T_w = \text{konst.}, q_w = \text{konst.}) . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Zur Anpassung der Gleichung (4.31) an das zu untersuchende Problem müssen noch die Kennzahlen K_1, K_2, K_3 festgelegt werden. Besondere Aufmerksamkeit gilt auch hier wieder dem Auftriebsterm

$$K_1 \hat{\rho}' = \frac{g^* L_B^*}{U_B^{*2}} \hat{\rho}' . \quad (4.33)$$

Aus der Skalierung des Grundströmungsproblems (4.4), (4.5) ergeben sich die Skalierungsgeschwindigkeit und die Skalierungslänge für die Stabilitätsgleichungen zu

$$U_B^* = 2 \sqrt{\frac{x^{*(r+1)}}{L_b^{*(r+1)}}} U_b^* , \quad L_B^* = \sqrt{2} L_b^* x^{*(r+3)/4} x^{*(1-r)/4} . \quad (4.34)$$

Da die Grenzschicht an der vertikalen beheizten Platte keinen charakteristischen Längenmaßstab besitzt (selbstähnliche Grenzschicht), kann ein beliebiger aber physikalisch sinnvoller Maßstab L_b^* gewählt werden. In Anlehnung an die Arbeiten von Nachtsheim (1963) oder Hieber und Gebhart (1971) wird die Bezugslänge $L_b^* = (\nu_B^{*2}/(g^*\beta^*\Delta_B T^*))^{(1/3)}$ gesetzt. Für (4.34) kann dann

$$U_B^* = 2 \sqrt{\frac{x^{*(r+1)}(g^*\beta^*\Delta_B T^*)^{(3+r)/3}}{\nu_B^{*2r/3}}}; \quad L_B^* = \sqrt{2} \left[\frac{\nu_B^{*2} x^{*(3-3r)/(r+3)}}{g^*\beta^*\Delta_B T^*} \right]^{(3-3r)/12} \quad (4.35)$$

geschrieben werden ($L_B^* = \delta^*(x^*)$). Diese Skalierung hat den Vorteil, für beliebige Wandtemperaturverteilungen anwendbar zu sein, wohingegen die oftmals in der Literatur vorkommenden Skalierungen entweder für den Fall $q_w = \text{konst.}$ oder für den Fall $T_w = \text{konst.}$ geeignet sind. Aus diesen Überlegungen können nun die Kennzahlen K_1 – K_3 des Problems aufgeschrieben werden.

$$K_1 = \frac{4^{5r/4}}{Gr^{(3+5r)/3}} \frac{1}{\beta^*\Delta_B T^*}, \quad K_2 = \frac{4^{r/4}}{Gr^{(3+r)/3}}, \quad K_3 = \frac{K_2}{Pr} \quad (4.36)$$

Die Grashof-Zahl ist definiert als

$$Gr = 2\sqrt{2} Gr_x^{1/4} = \left(\frac{(4x^*)^3 g^*\beta^*\Delta_B T^*}{\nu_B^{*2}} \right)^{1/4}. \quad (4.37)$$

Als Bezugszustand gilt der Zustand bei $y = \infty$. An dieser Stelle sei noch einmal ausdrücklich gesagt, daß auch für den Fall $q_w = \text{konst.}$ die Temperatur mit dem Ausdruck $(T_w^* - T_\infty^*)_{x^*=L^*} x^r$ ($r = 1/5$) entdimensioniert wird und nicht mit q_w^* .

Der Auftriebsterm wird analog zum Auftriebsterm in der Grundströmung in eine Taylorreihe entwickelt.

$$\begin{aligned} K_1 \hat{\rho}' &= \frac{4^{5r/4}}{Gr^{(3+5r)/3}} \frac{1}{\beta^*\Delta_B T^*} \left[(\varepsilon K_\rho \hat{\Theta}' + \varepsilon^2 K_{\rho 2} (\hat{\Theta} \bar{\Theta})' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right] \\ &= -\frac{4^{5r/4}}{Gr^{(3+5r)/3}} \left[\hat{\Theta}' + \varepsilon K_{\rho A} (\hat{\Theta} \bar{\Theta})' + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dabei gilt wieder $K_{\rho A} = K_{\rho 2}/K_{\rho}$.

Im folgenden soll beispielhaft die Stabilität der natürlichen Konvektionsströmung an der vertikalen Platte bei variablen Stoffwerten und der Randbedingung $T_w = \text{konst.}$ ($r = 0$) betrachtet werden.

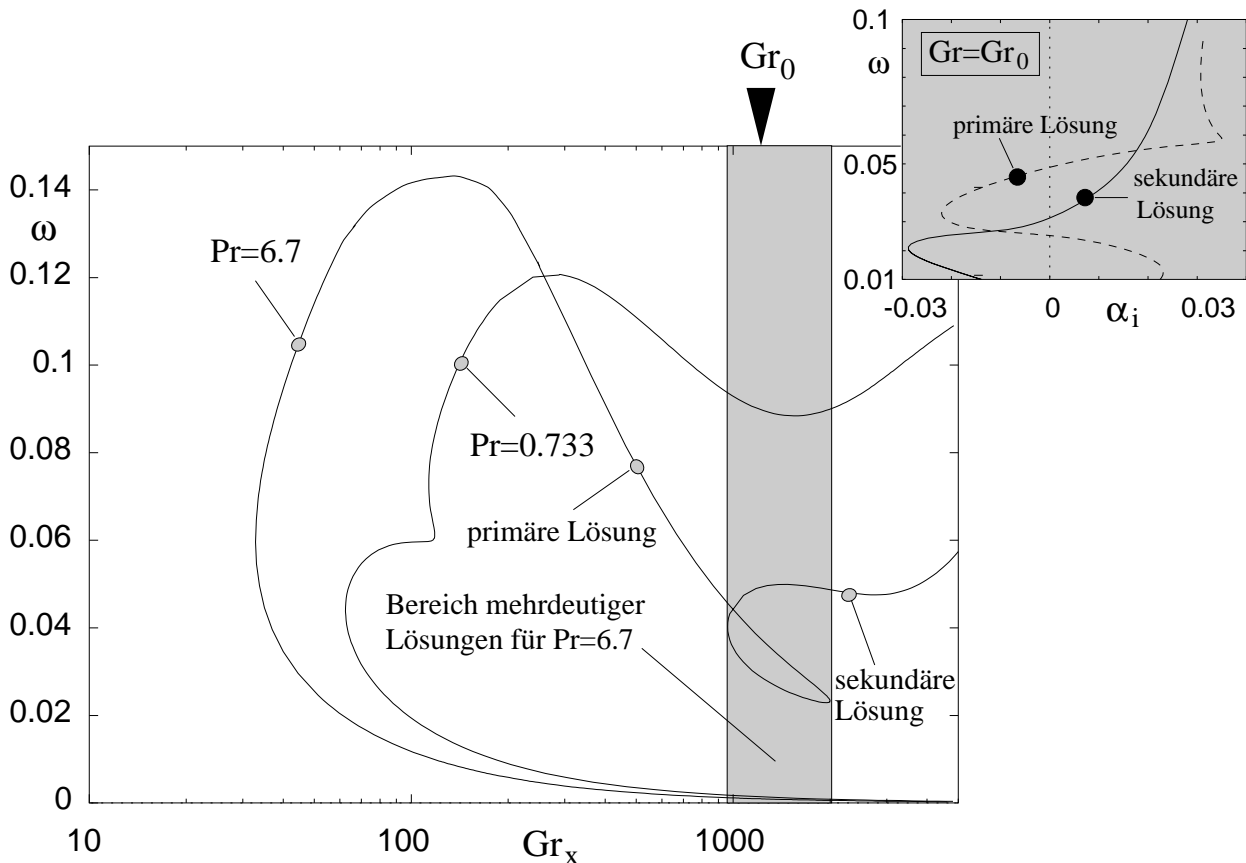


Abb. 4.3 : Indifferenzkurven für die Prandtl-Zahlen $Pr = 0.733$ und $Pr = 6.7$ (typisch für Luft und Wasser) nach Gleichung (4.31) (konstante Stoffwerte)

Abbildung 4.3 zeigt zunächst die neutralen Kurven bei konstanten Stoffwerten für verschiedene Prandtl-Zahlen. Der grau schraffierte Bereich kennzeichnet den Bereich, in dem zwei Lösungen existieren. Dieser Effekt tritt bei Prandtl-Zahlen ab etwa $Pr = 2.0$ auf. Zu jedem Wertepaar Gr, ω gibt es dann zwei verschiedene Eigenwerte $\hat{\alpha}$. Inwieweit diese Mehrdeutigkeit der Lösungen für große Prandtl-Zahlen auch in der Realität eine Bedeutung hat bzw. beobachtet werden kann, ist bisher noch nicht untersucht worden. Es ist jedoch realistisch anzunehmen, daß in einer Strömung Störungen verschiedener Anfachungsrate und Wellenzahl

gleichzeitig auftreten und daher die Lösung des mathematischen Modells hier keinen Widerspruch zur Physik darstellt.

Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte

In diesem Abschnitt soll der Einfluß des Temperaturfeldes auf die Stabilität der Strömung analysiert werden. Ziel ist es, die Effekte der einzelnen temperaturabhängigen Stoffwerte sowohl qualitativ als auch quantitativ in einer möglichst allgemeinen Darstellung zu erfassen. Wie schon in Kapitel 3 für die Rayleigh–Bénard–Strömung, wird für den kritischen Wert der das Problem beschreibenden Kennzahl (hier: Grashof–Zahl) ein allgemeiner Zusammenhang angegeben, der für beliebige Temperaturdifferenzen ($T_w^* - T_\infty^*$) und auch für beliebige Fluide gültig ist.

$$\begin{aligned} Gr_{krit} = Gr_{krit,0}(Pr) + \varepsilon [K_\rho A_\rho(Pr) + K_{\rho A} A_{\rho A}(Pr) + K_\eta A_\eta(Pr) \\ + K_\lambda A_\lambda(Pr) + K_c A_c(Pr)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Anders als im Fall der Rayleigh–Bénard–Konvektion sind hier die Einflußfunktionen A_ρ , $A_{\rho A}$, ... sowie auch die kritische Grashof–Zahl $Gr_{krit,0}$ zusätzlich von der Prandtl–Zahl abhängig. Im folgenden werden die konkreten Beispiele bevorzugt für die Prandtl–Zahlen $Pr = 6.7$ und $Pr = 7.0$ angegeben.

Alle Ergebnisse in diesem Kapitel, die Stoffwerteffekte beinhalten, wurden nach der kombinierten Methode oder der direkten Methode berechnet. Die entsprechende Grundströmung wurde nach den Gleichungen (4.13)–(4.24) bis zur 1. Ordnung berechnet. Höhere Ordnungen wurden ebenfalls nach der direkten bzw. kombinierten Methode bereitgestellt.

Um einen Eindruck von den Effekten der einzelnen Stoffwerte auf das Stabilitätsverhalten zu bekommen, ist in Abbildung 4.4 die Anfachungsrate α_i über der Grashof–Zahl für die Störungsfrequenz $F = 2\pi f^* \delta^* Gr^{1/3} / U_B^* = \omega Gr^{1/3} = 0.305$ aufgetragen.

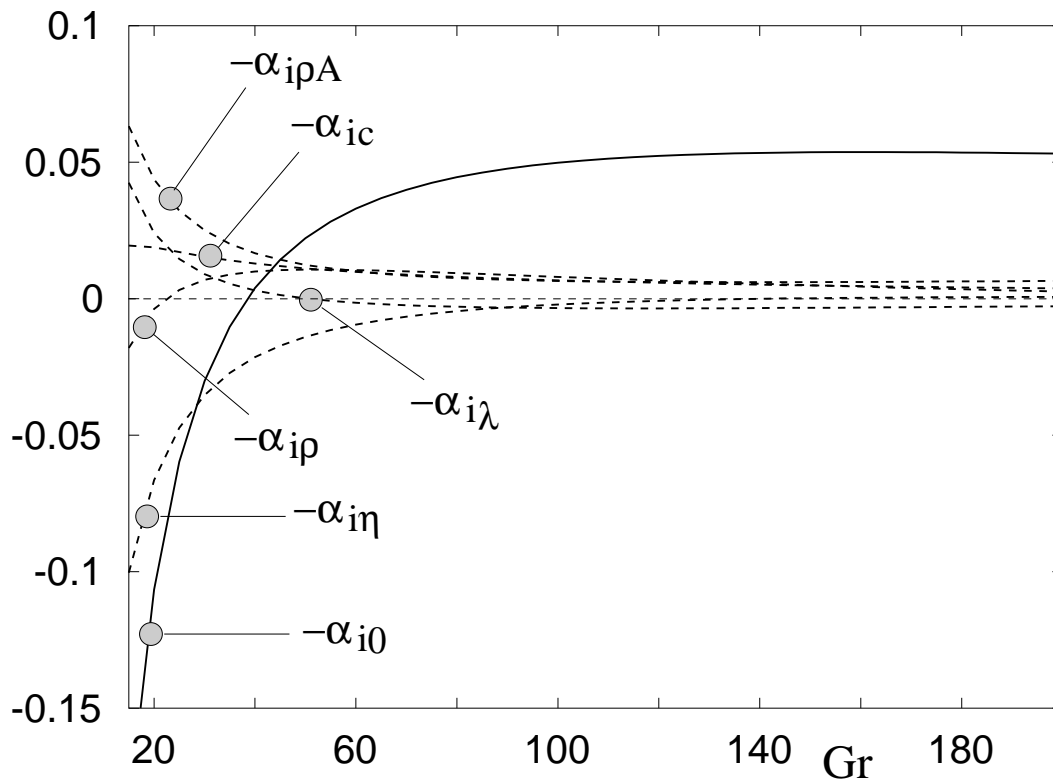


Abb. 4.4 : *Anfachungsrate 0. und 1. Ordnung einer Störung mit der Frequenz*
 $F = 0.305$ ($Pr = 6.7$)

Die einzelnen Stoffwerteinflüsse, welche in Abbildung 4.4 zu sehen sind, sind in Form der Einflußfunktionen α_{ip} , α_{ipA} , ... für die Prandtl-Zahl $Pr = 6.7$ dargestellt. Es ist zunächst kein einheitlicher Trend in den einzelnen Einflußfunktionen feststellbar. Lediglich die Abnahme des Betrages der Einflußfunktionen mit Zunahme der Grashof-Zahl scheint einheitlich zu sein.

Der reale Effekt der temperaturabhängigen Stoffwerte auf die Anfachungsrate kann unter Hinzunahme der entsprechenden Stoffkonstanten (s. Tabelle 2.2) K_ρ , $K_{\rho A}$, ... und der Heizrate $\varepsilon = (T_w^* - T_\infty^*)/T_\infty^*$ berechnet werden. Mit den Werten für Wasser aus Tabelle 2.2 ($Pr \sim 7.0$) und $K_{\rho A} = K_{\rho 2}/K_\rho = 15.89$ ergeben sich dann die zusammengesetzten Anfachungsraten α_i für verschiedene Heizraten nach Bild 4.5. Die in Abbildung 4.5 dargestellten Ergebnisse zeigen die Summe aller Stoffwerteffekte auf die lokale Anfachungsrate bis zur 1. Ordnung. Negative Werte für die Heizrate ε entsprechen dem Fall, daß die Wand gekühlt wird (Im Fall einer Kühlung ist zu beachten, daß Wasser bei $0^\circ C$ gefriert und daher die Ergebnisse nur bis ca $\varepsilon = 0.68$ als gültig sind).

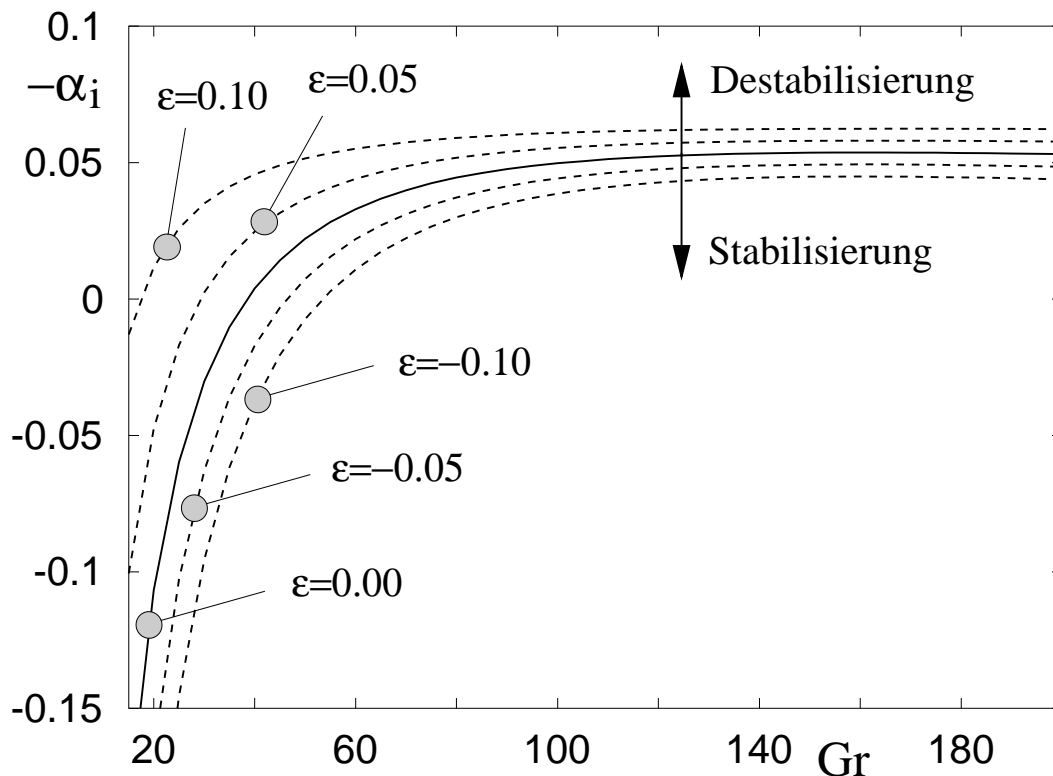


Abb. 4.5 : Zusammengesetzte Anfachungsrate α_i einer Störung mit der Frequenz $F = 0.305$ für verschiedene Heizraten ϵ ($Pr = 6.7$, $T = 293K$)

Die Strömung ist in diesem Fall der Gravitationsbeschleunigung gleichgerichtet (Plattenvorderkante oben), also entgegengesetzt der in Bild 4.1 eingezeichneten Richtung. Die in Bild 4.5 eingezeichneten Pfeile deuten die Richtung an, in der die lokalen Anfachungsraten gegenüber der Anfachungsrate ohne Stoffwerteffekte (0. Ordnung) verringert (Stabilisierung), bzw. vergrößert (Destabilisierung) werden. Es ist zu beachten, daß die Ergebnisse aus Abbildung 4.5 lediglich für die gezeigte Frequenz der Störung gültig sind. D.h., für eine Störung mit der Frequenz $F = 0.305$ in einem Fluid der Prandtl-Zahl $Pr = 6.7$ wirken sich die Effekte variabler Stoffwerte (nur 1. Ordnung) bei einem positiven Temperaturgradienten ($\partial T^*/\partial y^* > 0$) in der Strömung destabilisierend aus, bei negativem Temperaturgradienten ($\partial T^*/\partial y^* < 0$) hingegen stabilisierend. Dieses steht zunächst im Widerspruch zu den Beobachtungen an Grenzschichtströmungen bei erzwungener Konvektion. Dort gilt zumindest für die kritische Reynoldszahl genau das Gegenteil (s. Kapitel 5). Inwiefern hier ein Widerspruch besteht, oder lediglich andere Effekte aufgrund eines anderen Strömungstypen auftre-

ten, soll nun geklärt werden. Dazu sind die Einflußfunktionen 1. Ordnung für die kritische Grashof-Zahl bei verschiedenen Prandtl-Zahlen berechnet worden. Abbildung 4.6 zeigt die 5 Einflußfunktionen aus Gleichung (4.39).

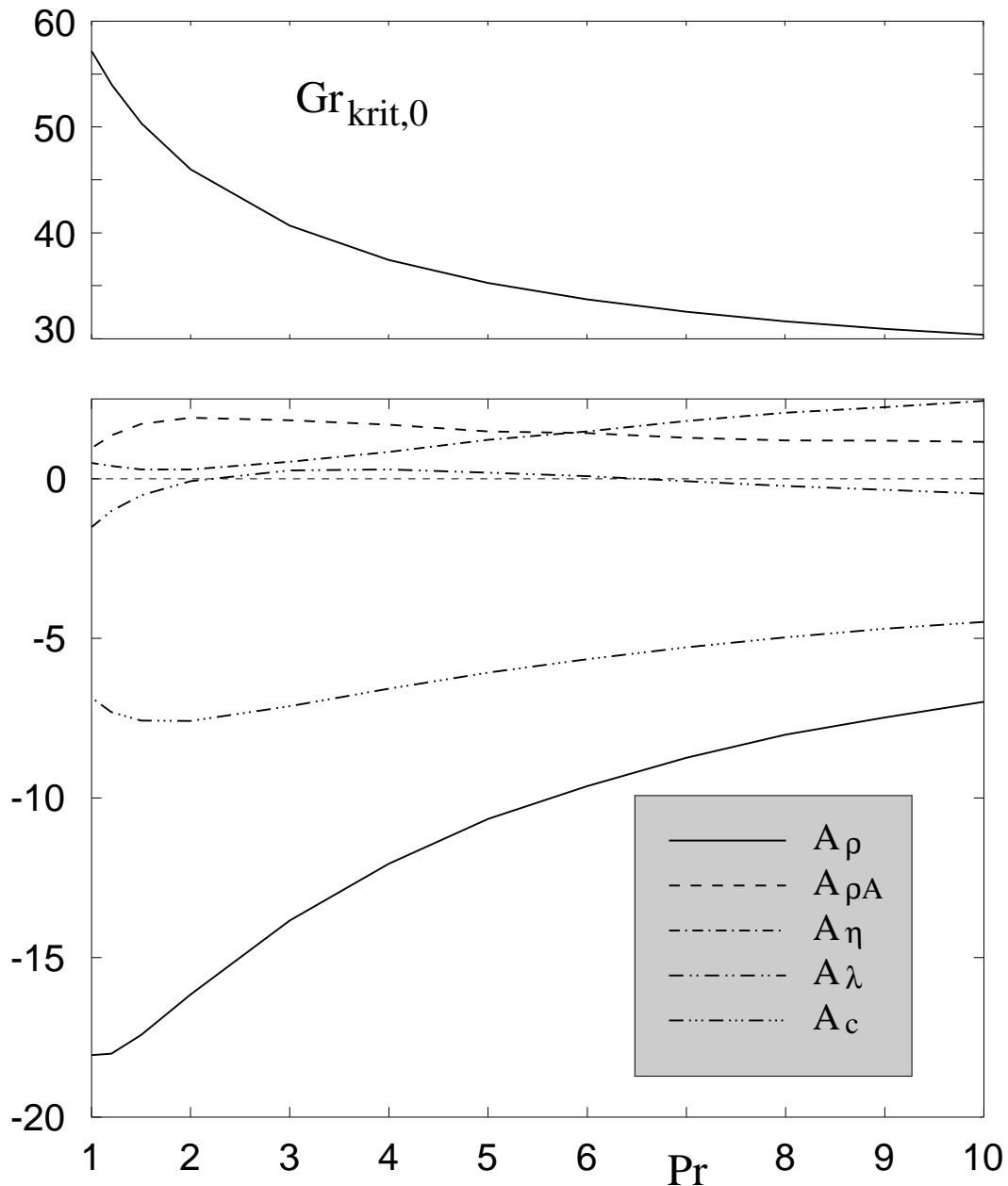


Abb. 4.6 : *Einflußfunktionen 1. Ordnung und kritische Grashof-Zahl als Funktionen der Prandtl-Zahl.*

Abweichend von den Beobachtungen bei der erzwungenen Konvektion (Kapitel 5) ist A_η im gesamten gezeigten Bereich für die Prandtl-Zahl positiv. Der Viskositätseffekt erster Ordnung ist hier also genau entgegengesetzt zum

Fall der erzwungenen Konvektion. Für eine Wasserströmung erhält man unter ausschließlicher Berücksichtigung der Viskosität einen stabilisierenden Effekt im Falle $T_w < T_\infty$ und einen destabilisierenden Effekt für $T_w > T_\infty$ ($Gr_{krit} = 32.5 - 12.9\varepsilon$). Eine Auswertung der Gleichung (4.39) für alle Stoffwerte ergibt $Gr_{krit} = 32.5 + 8.14\varepsilon$ ($Pr = 7.0$). Hier liefert also die alleinige Betrachtung des Effektes der Viskosität ein irreführendes Ergebnis, und es ist offensichtlich nicht zulässig nur den Viskositätseffekt zu betrachten.

In den Arbeiten von Sabhapathy und Cheng (1986) sowie von Jang und Molendorn (1988) wird der Einfluß der Viskosität auf die Stabilität der natürlichen Konvektion an der isothermen vertikalen Wand als stabilisierend für den Fall $T_w > T_\infty$ und destabilisierend für $T_w < T_\infty$ angegeben. Beide Arbeiten befassen sich mit Fluiden im Prandtl-Zahlenbereich $Pr > 6.0$. Da in beiden Arbeiten die Filmtemperatur ($T_{film}^* = (T_w^* + T_\infty^*)/2$) als Bezugstemperatur (Entdimensionierung) gewählt wurde, ist der Effekt variabler Stoffwerte dort gegenüber dem Fall konstanter Stoffwerte anders bewertet worden als in der vorliegenden Arbeit. Wie schon You und Herwig (1997) anmerkten wird durch die unterschiedliche Wahl der Bezugstemperatur lediglich eine Niveauverschiebung bewirkt. Dies kann zu einer irreführenden Bewertung der Effekte variabler Stoffwerte führen.

Bei konstanten Stoffwerten ist der Wert der Viskosität bei Filmtemperatur identisch mit dem bei Umgebungstemperatur (s. Sabhapathy, Cheng (1986)). Die Werte der kritischen Grashof-Zahlen in den erwähnten Arbeiten entsprechen dann den hier berechneten Werten. Bei Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte ändert sich dies. Die Grashof-Zahl wird dann bei Sabhapathy und Cheng nicht mit η_∞ sondern mit η_{film} gebildet und ein direkter Vergleich zwischen den kritischen Werten für die Grashof-Zahl, welche mit η_{film} gebildet wurde und den Werten der mit η_∞ gebildeten Grashof-Zahl ist nicht mehr möglich. Es kann jedoch eine Transformation durchgeführt werden, die es erlaubt zumindest näherungsweise einen Vergleich der Ergebnisse durchzuführen. Dazu sind sowohl die Prandtl-Zahl als auch die Grashof-Zahl entsprechend dem verwendeten Bezugszustand umzurechnen. Eine solche Umrechnung sollte

dann Aufschluß über die unterschiedliche Beurteilung der Stoffwerteffekte geben können. Als Beispiel ist hier das Ergebnis von Sabhapathy und Cheng für eine Prandtl-Zahl von $\tilde{Pr} = 10$ umgerechnet worden (Mit \sim gekennzeichnete Kennzahlen sind mit der Viskosität bei Filmtemperatur gebildet). Sabhapathy und Cheng (1986) gaben ein lineares Stoffgesetz der Form $\bar{\eta} = 1 + \gamma_{film} (\bar{\Theta} - 1/2)$ an. Wobei $\gamma_{film} = \varepsilon K_\eta$ ist. Für $\gamma_{film} = 0.5$ ($T_w < T_\infty$) ergibt sich so bei einer Nachrechnung der Ergebnisse von Sabhapathy und Cheng eine kritische Grashof-Zahl von $\tilde{Gr}_{krit} = 28.56$. Diese ist dann jedoch mit den Bezugsgrößen bei Filmtemperatur gebildet. Der Prandtl-Zahl von $\tilde{Pr} = 10$ entspricht eine mit der Viskosität bei Umgebungstemperatur gebildete Prandtl-Zahl von $Pr = (1 - \gamma_f/2)\tilde{Pr} = 7.5$. Die Umrechnung der kritischen Grashof-Zahl für konstante Stoffwerte und $Pr = 7.5$ (s. Abbildung 4.6 oben) von $Gr_{krit} = 32.1$ auf eine Grashof-Zahl, welche mit der Viskosität bei Filmtemperatur gebildet wird, ergibt schon

$$\tilde{Gr}_{krit}^* = [1 - \gamma_{film}/2]^{1/2} Gr_{krit} = 27.8. \quad (4.40)$$

Die Differenz zu $\tilde{Gr}_{krit} = 28.56$ ist dann der reale Effekt variabler Viskosität und bewirkt ein Ansteigen der kritischen Grashof-Zahl um $\Delta Gr_{krit} = 28.56 - 27.8 = 0.76$, also eine Stabilisierung der Strömung. Diesen Wert erhält man näherungsweise auch unter Verwendung von Gleichung (4.39) und dem Wert $A_\eta = 1.94$ (s. Abbildung 4.6 unten): $\Delta Gr_{krit} = \varepsilon K_\eta A_\eta = 0.5 \cdot 1.94 = 0.97$. Die Differenz zwischen beiden Werten ist dadurch zu erklären, daß der Differenzbetrag 0.76 aus den Ergebnissen direkter Berechnungen der kritischen Grashof-Zahl mit einem linearen Stoffgesetz stammt und damit auch Effekte höherer Ordnung ($A_{\eta\eta}, \dots$) in den Ergebnissen vertreten sind. Dahingegen wurde der Wert 0.97 aus dem asymptotischen Zusammenhang (4.39) bestimmt und enthält nur Effekte 1. Ordnung.

Es ist keineswegs als falsch anzusehen, den Bezugspunkt bei Filmtemperatur zu wählen. Vielmehr zeigt sich hier, daß die Beurteilung der Effekte variabler Stoffwerte sehr stark von der Wahl des Bezugszustandes abhängt und daß eine

Interpretation der Ergebnisse dies immer berücksichtigen sollte.

Die Auswirkung der Stoffwerteffekte erster Ordnung auf die kritische Grashof-Zahl ist in Abbildung 4.7 zu sehen ($Pr = 7.0$, K -Werte nach Tabelle 2.2). Die dargestellten Effekte resultieren aus einer Berechnung der kritischen Grashof-Zahl nach Gleichung (4.39) und umfassen nur die Effekte 1. Ordnung (A_ρ , $A_{\rho A}$, ...). Da es sich bei dem der Abbildung 4.7 zugrundeliegenden Fluid um ein wasserähnliches Fluid handelt, ist der Effekt variabler Viskosität relativ groß, und wie zu erwarten war, entgegengesetzt dem von Sabapathy und Cheng (1986) angegebenen Effekt.

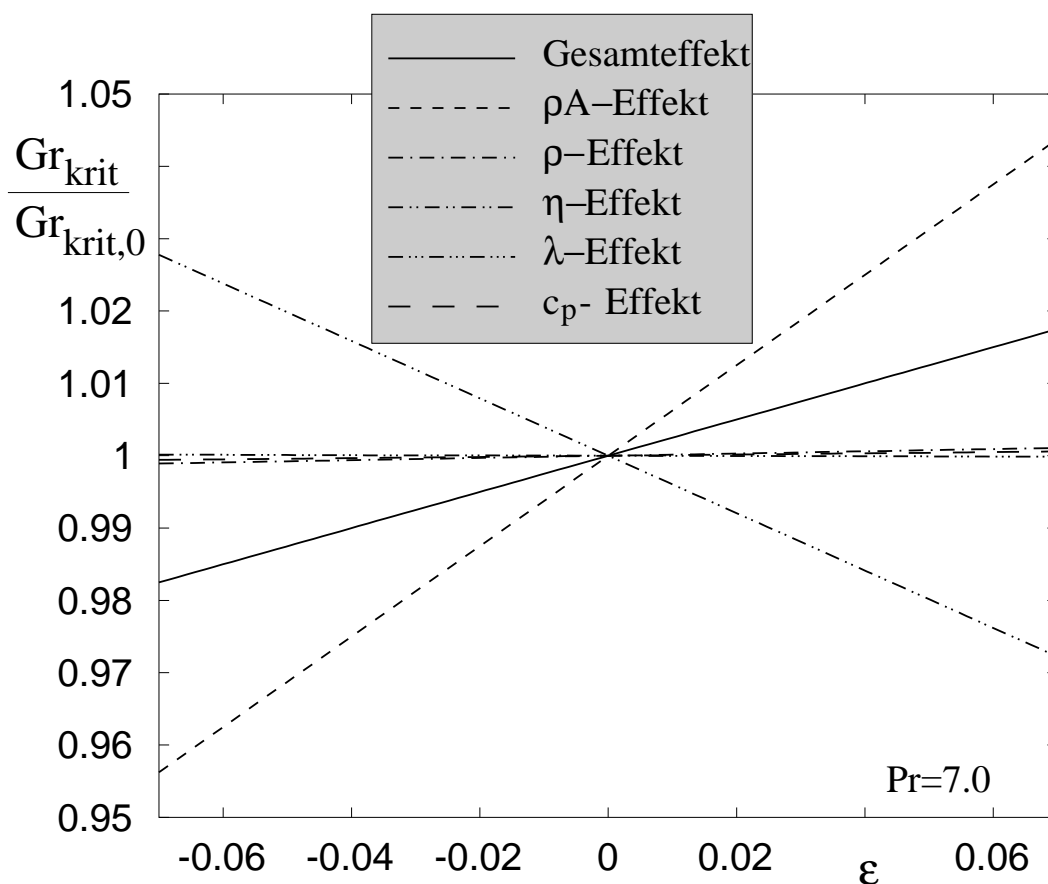


Abb. 4.7 : *Einfluß der Stoffwerte auf die kritische Grashof-Zahl für ein wasserähnliches Fluid ($Pr = 7.0$, nur Effekte 1. Ordnung)*

Einen weiteren starken Einfluß hat jedoch auch die Dichte in Form des $A_{\rho A}$ -Effektes. Dieser Effekt ist die Folge aus Veränderungen des Auftriebsterms aufgrund von Dichteänderungen. Obwohl die Dichte von Flüssigkeiten nur

sehr schwach temperaturabhängig ist, hat dieser Effekt gerade im Auftriebsterm eine große Bedeutung. Weder die Auftragung der Grundströmungsprofile (Abbildung 4.2), noch die Einflußfunktion $A_{\rho A}$ (Abbildung 4.6) weisen auf die Besonderheit dieses Effektes hin. Sie ist vielmehr durch das Verhältnis $K_{\rho 2}/K_{\rho} = 15.89$ bestimmt, welches für wasserähnliche Flüssigkeiten besonders hohe Werte annehmen kann (s. Tabelle 2.2). Der Gesamteffekt variabler Stoffwerte resultiert daher für wasserähnliche Fluide in einer Erhöhung der kritischen Grashof-Zahl.

Es bleibt noch zu klären, inwiefern dieses Ergebnis mit den anfänglich gezeigten Anfachungsraten 1. Ordnung (s. Abbildung 4.4 und 4.5) übereinstimmt (Der Unterschied in der Prandtl-Zahl soll hierbei vernachlässigt werden.).

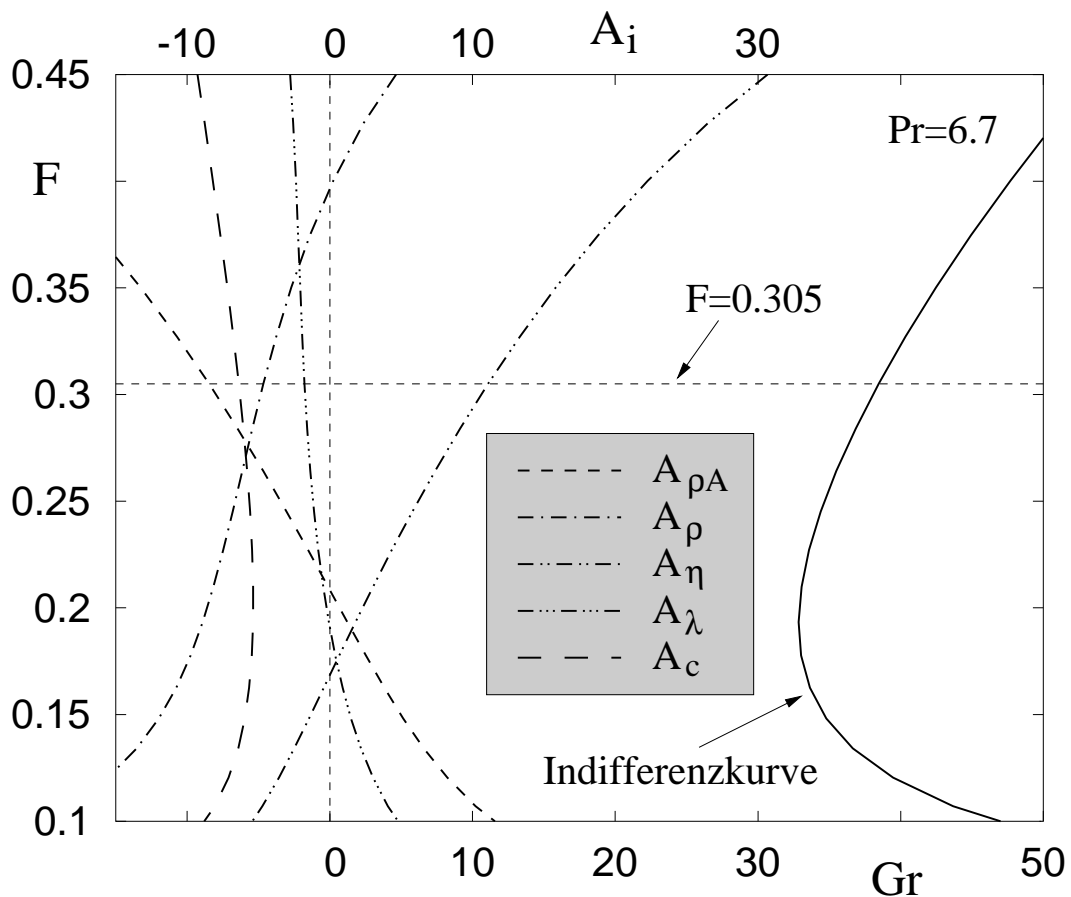


Abb. 4.8 : *Einflußfunktionen 1. Ordnung (A_i) in Abhängigkeit der Frequenz der Störbewegung ($Pr = 6.7$, $T = 293K$)*

Dazu sind die Einflußfunktionen 1. Ordnung für eine Prandtl-Zahl von $Pr = 6.7$

in Abhängigkeit der Frequenz F berechnet und in Abbildung 4.8 dargestellt worden. Anhand von Abbildung 4.8 ist deutlich zu sehen, daß die Einflußfunktionen 1. Ordnung eine starke Abhängigkeit von der Frequenz der Störbewegung haben. Die in Abbildung 4.4 und 4.5 gezeigten Anfachungsraten 1. Ordnung weisen für die Stelle $\alpha_{i0} = 0$ das gleiche Verhalten auf, wie es durch die Einflußfunktionen A_ρ , $A_{\rho A}$, ... in Abbildung 4.8 für die Frequenz $F = 0.305$ angezeigt wird. Dahingegen ist deutlich sichtbar, daß gerade im kritischen Punkt ($F = 0.19$) die Werte der A_i verschieden sind und daher auch die Anfachungsraten 1. Ordnung dort anders verlaufen müssen. Ob und wie eine Störung durch temperaturabhängige Stoffwerte beeinflusst wird, ist also auch von der Frequenz der Störung abhängig.

Durch die Arbeiten von Gebhart und Mahajan (1975, 1982), Godaux und Gebhart (1974) sowie Jaluria und Gebhart (1971) ist bekannt, daß in der Grenzschicht an der vertikalen beheizten Wand Störungen mit einer sogenannten **charakteristischen Frequenz** besonders stark angefacht werden und der Transitionsprozeß durch eben diese Störungen eingeleitet wird. Für die thermische Randbedingung $T_w = \text{konst.}$ und eine Fluid mit der Prandtl-Zahl $Pr = 6.7$ liegt die charakteristische Frequenz bei etwa $F = 0.28$. Für eben diese Frequenz ist der Effekt variabler Stoffwerte auf das Amplitudenverhältnis A/A_0 untersucht worden. Für den Fall der isothermen Wand gilt

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{1}{3} \int_{Gr_0}^{Gr} \alpha_i dGr. \quad (4.41)$$

Dabei ist A_0 die Amplitude der Störung auf der neutralen Kurve. Aus den Abbildungen 4.5 und 4.8 ist etwa abschätzbar, daß die Anfachungsraten unter Einfluß variabler Stoffwerte bei einer Frequenz von $F = 0.28$ ähnlich wie in Abbildung 4.5 verlaufen werden. Somit ist für $T_w^* > T_\infty^*$ eine stärkere Anfachung der Störungen und damit ein eher einsetzender Transitionsprozeß zu erwarten als für den umgekehrten Fall. Je größer die absolute Temperaturdifferenz $|T_w^* > T_\infty^*|$ ist, desto stärker macht sich dieser Trend bemerkbar.

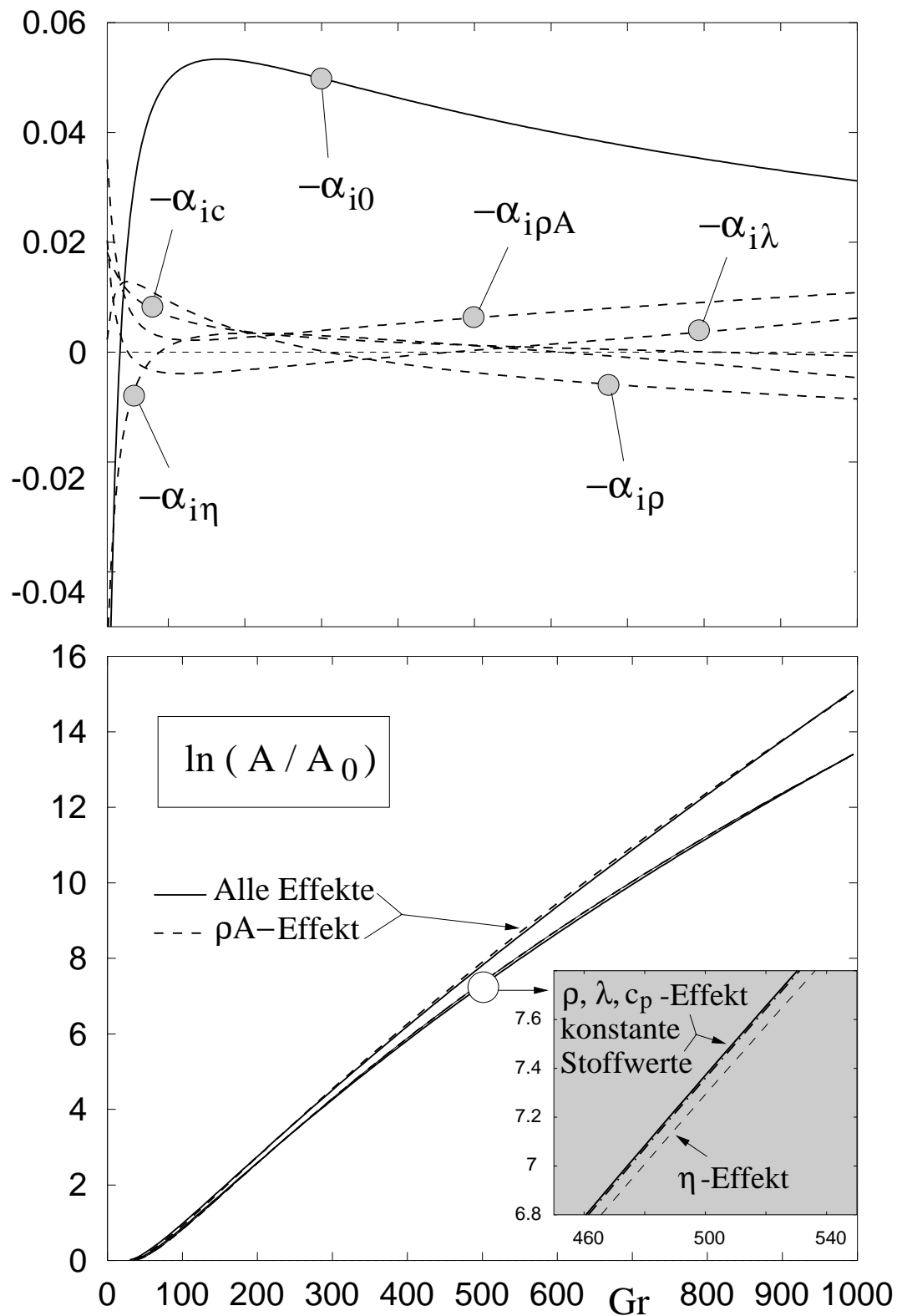


Abb. 4.9 : Anfachungsraten 0. und 1. Ordnung (oben) und resultierendes Amplitudenverhältnis $\ln(A/A_0)$ (unten) für Störungen mit der Frequenz $F = 0.28$ ($Pr = 6.7$, $\varepsilon = 0.05$)

In Abbildung 4.9 sind die einzelnen Stoffwerteffekte auf das Amplituden-

verhältnis $\ln(A/A_0)$ dargestellt. Es sind dazu jeweils die Anfachungsraten $\alpha_i = \alpha_{i0} + \varepsilon K_j \alpha_{ij}$ ($j = \rho, \rho A, \dots$) mit $\varepsilon = 0.05$ ($\Delta T^* \sim 14.6$) addiert und nach Gleichung (4.41) integriert worden. Die K -Werte sind Tabelle 2.2 entnommen (Wasser, $T = 293K$). Die Anfachungsraten α_{ij} sind in Abbildung 4.9 (oben) noch einmal für die Frequenz $F = 0.28$ angegeben. Die daraus zusammengesetzten Amplitudenverhältnisse sind darunter dargestellt (untere Kurve: konstante Stoffwerte; ρ, η, λ, c_p -Effekte; obere Kurve: alle Effekte; ρA -Effekt). Es zeigt sich, daß auch hier der ρA -Effekt entscheidend ist. Das liegt zum einen daran, daß das Verhältnis $K_{\rho 2}/K_\rho$ in diesem speziellen Fall sehr groß ist. Zum Anderen steigt $-\alpha_{i\rho A}$ stromabwärts monoton an, während $-\alpha_{i\eta}$ mehrfach das Vorzeichen wechselt und alle anderen $-\alpha_i$ aufgrund der kleinen K -Werte vernachlässigbar sind. In dem grau eingefärbten Kasten in Abbildung 4.9 (unten) ist der Einfluß der übrigen Stoffwerte vergrößert dargestellt. Dadurch wurde der Einfluß der Viskosität verdeutlicht. Die Effekte der übrigen Stoffwerte (ρ, λ, c_p) sind verschwindend gering, so daß die dafür berechneten Kurven der Amplitudenverhältnisse mit der Kurve für konstante Stoffwerte zusammenfällt. Für den hier untersuchten sehr speziellen Fall wirkt der Einfluß variabler Stoffwerte zunächst stabilisierend auf die Grenzschicht bei $T_w^* > T_\infty^*$ (s. Abbildung 4.7). Betrachtet man jedoch das Amplitudenverhältnis der Störungen mit der charakteristischen Frequenz $F = 0.28$, so ist der Effekt umgekehrt. Diese Beobachtung machten auch Sabapathy und Cheng (1986) für den Einfluß des temperaturabhängigen isobaren thermischen Ausdehnungskoeffizienten auf das Stabilitätsverhalten der Strömung. Durch die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit von β^* haben sie nichts anderes gemacht, als die Dichteänderung im Auftriebsterm bis zur 1. Ordnung (asymptotisch) zu erfassen. Das entspricht dem ρA -Effekt in der vorliegenden Arbeit.

Anmerkung: Die hier angestrebten Untersuchungen sind bis zur Bestimmung der Einflußfunktionen als allgemeingültig anzusehen. Aussagen zum Einfluß der verschiedenen temperaturabhängigen Stoffwerte auf die Stabilität bzw. auf das Transitionsverhalten der Strömungen sind nur für jeweils spezielle Situationen

machbar. Das zeigt schon die Besonderheit des ρA -Effektes, der bei einer Temperatur von $T_\infty^* = 343K$ nur noch etwa $1/5$ des gezeigten Effektes ausmachen dürfte, da das Verhältnis $K_{\rho 2}/K_\rho$ für diese Temperatur nur noch ca. 3 beträgt (Gersten, Herwig (1992)). Bei einer Temperatur von $4^\circ C$ hingegen kommt z.B. bei Wasser noch ein spezieller Effekt durch die Wasseranomalie hinzu. Da hier nur eine Theorie 1. Ordnung für $\varepsilon \rightarrow 0$ verfolgt wurde, können die Ergebnisse lediglich einen Anhaltspunkt darstellen und Hinweise für weitere speziellere Analysen geben.

4.4 Nichlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der Grenzschichtströmung an der vertikalen beheizten Platte

Die nichtlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der natürlichen Konvektionsströmung an der vertikalen beheizten Platte mittels der vollständigen PSE-Gleichungen wird in diesem Kapitel unter dem Aspekt der Brauchbarkeit und Vergleichbarkeit mit Ergebnissen der OSE-Analyse betrachtet. Da bisher lediglich eine Arbeit bekannt ist, in der die PSE-Gleichungen für den vorliegenden Strömungstyp gelöst wurden (Brooker (1996): nur lokale Lösungen), soll das Ziel dieses Abschnitts in der Bewertung der Theorie bezüglich der Anwendbarkeit bestehen.

Die Bezugsgrößen für die PSE-Gleichungen sind entsprechend der Tabelle 2.1 zu wählen, wobei für die Bezugslänge L_B^* die Grenzschichtdicke $\delta^*(x_0^*)$ an einer festen Stelle x_0^* gesetzt wird. Das so festgelegte Koordinatensystem mit den Koordinaten $\hat{x} = x^*/\delta^*(x_0^*)$ und $\hat{y} = y^*/\delta^*(x_0^*)$ erfordert eine Transformation der nach Kapitel 4.2 berechneten Grundströmung nach folgender Vorschrift:

$$\Psi(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} \right)^{3/4} f(x, \eta_s) \quad , \quad \hat{x}_0 = \frac{Gr_0}{4} = \left(\frac{g^* \beta_\infty^* \Delta_B T^* (4x_0^*)^3}{4^4 \nu_\infty^{*2}} \right)^{1/4} \quad (4.42)$$

Daraus kann die Grundströmung zu

$$-\frac{\partial \Psi(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} = \bar{v}\bar{\rho} = \frac{1}{4\hat{x}^{1/4}\hat{x}_0^{3/4}} \left[f'(x, \eta_s) \hat{y} \left(\frac{\hat{x}_0}{\hat{x}} \right)^{1/4} - 3f(x, \eta_s) \right] \quad (4.43)$$

und

$$\frac{\partial \Psi(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} = \bar{u}\bar{\rho} = f'(x, \eta_s) \left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} \right)^{1/2} \quad (4.44)$$

berechnet werden. Die Koordinate quer zur Strömungsrichtung ist $\hat{y} = y^*/\delta_0^* = \eta_s(\hat{x}/\hat{x}_0)^{1/4}$. Der komplexe Parameter $\hat{\alpha}$ wird nach

$$\underline{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha} \frac{\delta_0^*(x_0^*)}{\delta^*(x^*)} = \hat{\alpha} \left(\frac{Gr_0}{Gr} \right)^{1/3} \quad (4.45)$$

umgerechnet. Diese Transformation gilt natürlich nur für die thermische Randbedingung $T_w = \text{konst.}$, kann aber in ähnlicher Weise auch für andere thermische Randbedingungen durchgeführt werden.

4.4.1 Lokale Lösungen

Brooker (1996) berechnete die lokalen Lösungen für die natürliche Konvektionsströmung an der vertikalen Wand und stellte bei einem Vergleich mit direkten numerischen Simulationen des Problems fest, daß die von Bertolotti (1991) vorgeschlagenen Gleichungen zur Erzeugung lokaler Lösungen starke Abweichungen gegenüber diesen aufwiesen. Er schloß daraus eine nicht korrekte Widergabe der physikalischen Situation durch die lokalen Lösungen und schlug eine Erweiterung der Gleichungen in Form der sogenannten **modified PSE** vor. Bei der Entwicklung sowohl der PSE-Gleichungen, als auch der Grundströmungsterme in \hat{x} -Richtungen vernachlässigte er nur die Terme 2. Ordnung der Entwicklungen. Die Terme, welche durch Produkte von Termen 1. Ordnung der Form $\bar{a}_1 \hat{a}_1$ entstehen, wurden jedoch in die Gleichungen aufgenommen. Dies ist zwar nicht

konsequent, da nur ein Teil der Terme 2. Ordnung berücksichtigt wurde, erbrachte aber die erhoffte Verbesserung der Ergebnisse. Desweiteren wurden nur Terme 1. Ordnung benötigt, wodurch nur die Lösung des Gleichungssystems 0. und 1. Ordnung erforderlich ist. Die Gleichungen (2.24) aus Kapitel 2.2.2 lauten dann in der modifizierten Form

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + \varepsilon [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T & \varepsilon [\mathcal{K}_2^* \mathcal{M}_2^* \mathcal{E}_2^*]^T \\ [\mathcal{K}_4 \mathcal{M}_4 \mathcal{E}_4]^T & [\mathcal{KM}\mathcal{E}_{015}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\Psi}_0 \\ \vec{\Psi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.46)$$

Der Platzhalter $\mathcal{KM}\mathcal{E}_{015}$ steht für den Ausdruck

$$\mathcal{KM}\mathcal{E}_{015} = [\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + \varepsilon [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T + [\mathcal{K}_5 \mathcal{M}_5 \mathcal{E}_5]^T. \quad (4.47)$$

Die Operatoren \mathcal{K}_2^* , \mathcal{M}_2^* , \mathcal{E}_2^* sind gegenüber den Operatoren \mathcal{K}_2 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{E}_2 aus Gleichung (2.24) um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ erweitert worden, die sich durch Produkte aus x -Ableitungen der Grundströmung und der Störgrößen zusammensetzen. Diese Terme sind also in Bezug auf die in Kapitel 2 vollzogene Herleitung der PSE-Gleichungen nach der Methode multipler Skalen Terme höherer Ordnung und sollen daher nicht weiter berücksichtigt werden. Die Operatoren \mathcal{K}_5 , \mathcal{M}_5 , \mathcal{E}_5 hingegen sind lediglich aus der Entwicklung der PSE-Gleichungen in x -Richtung als Produkte der Terme 1. Ordnung dieser Entwicklungen hinzugekommen und daher im Sinne der Methode multipler Skalen keine Terme höherer Ordnung. Sie ergeben sich aus den Operatoren \mathcal{K}_4 , \mathcal{M}_4 , \mathcal{E}_4 durch einfaches Differenzieren $\partial/\partial i\hat{\alpha}$.

Ein Vergleich der modifizierten lokalen Lösungen und der lokalen Lösungen der PSE-Gleichungen mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation von Brooker (1996) ist in Abbildung 4.10 zu sehen (Die mit \sim gekennzeichneten Größen wurden für den Vergleich mit L_b^* entdimensioniert (s. Kapitel 4.3) und nicht mit δ_0^*). Dargestellt sind die Beträge der Amplitudenfunktionen $\hat{\Theta}$ und \hat{u} , sowie die Anfachungsraten $\tilde{\alpha}_{iu}$ und $\tilde{\alpha}_{i\Theta}$. Durch die starke Kopplung zwischen Temperatur- und Strömungsfeld ist es nun zweckmäßig, eine Anfachungsrate

für die Temperaturschwankungen in gleicher Weise wie für die Geschwindigkeitsschwankungen (Kapitel 2.2.2) zu definieren.

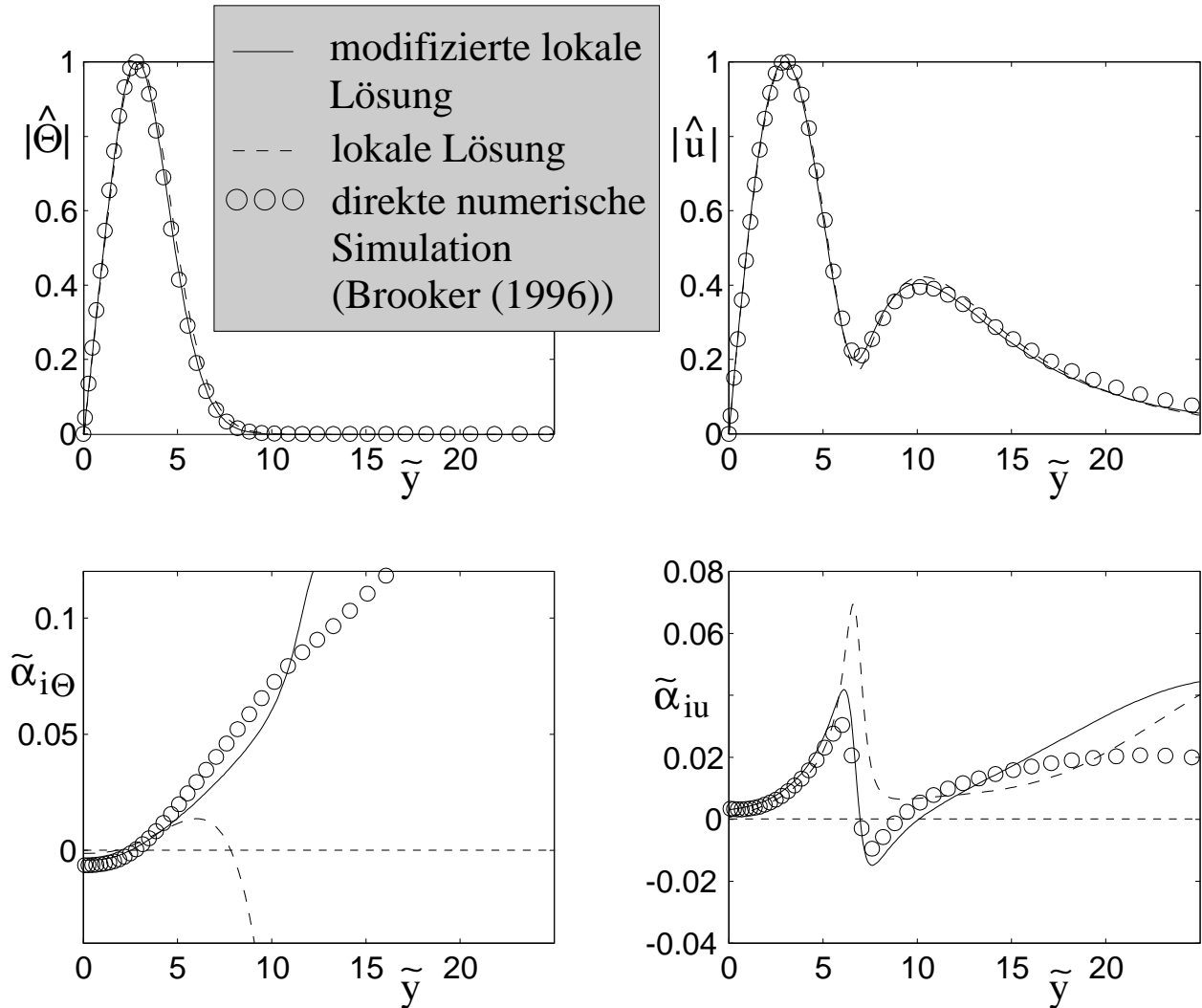


Abb. 4.10 : Vergleich der lokalen (nach Gleichung (2.24)) und modifizierten lokalen Lösungen (nach Gleichung (4.46)) mit Lösungen aus einer direkten numerischen Simulation von Brooker (1996) ($Pr = 7.0$, $F = 0.314$, $Gr = 50$)

Geht man davon aus, daß die DNS-Ergebnisse von Brooker (1996) die Physik der Störungsentwicklung in der natürlichen Konvektionsgrenzschicht an der beheizten Wand am besten wiedergeben, so zeigt sich in Abbildung 4.10 deutlich die Verbesserung der Ergebnisse durch die modifizierten Gleichungen (4.47). Besonders im wandnahen Bereich ($\tilde{y} < 10$) ist dieser Unterschied von Bedeutung, wenn die Anfachungsrate nach Gleichung (2.25) bestimmt wird. Brooker

(1996) definierte eine gewichtete integrale Anfachungsrate

$$\tilde{\alpha}_{iq}^* = \frac{1}{\int_0^{\tilde{y}} |q(\hat{x}, \tilde{\xi})| d\tilde{\xi}} \int_0^{\tilde{y}} \alpha_{iq}(\hat{x}, \tilde{\xi}) |q(\hat{x}, \tilde{\xi})| d\tilde{\xi} \quad (4.48)$$

für das Problem. Der Index q steht für die entsprechenden Störgrößen \hat{u} bzw. $\hat{\Theta}$. Der Grund für die Einführung der modifizierten Gleichungen liegt daher auf der Hand. Diese Definition der Anfachungsrate ist sehr viel sensibler gegenüber Abweichungen zu Ergebnissen aus der direkten numerischen Simulation. Dennoch ist selbst für die in dieser Arbeit gewählte Anfachungsrate die Differenz zwischen den modifizierten lokalen Lösungen und den lokalen Lösungen relativ groß. Für die in Abbildung 4.10 dargestellte Störung ergibt sich z.B. nach den modifizierten Gleichungen eine Anfachungsrate von $\tilde{\alpha}_{iu} = 0.0097$ gegenüber $\tilde{\alpha}_{iu} = 0.0083$ aus den nicht modifizierten Gleichungen. Das entspricht einer Abweichung von über 14%. Die Abweichung in der Anfachungsrate für die Temperaturschwankung beträgt sogar über 100%. Für Untersuchungen, welche auf den Gleichungen für die lokalen Lösungen basieren, sollten daher immer die modifizierten Gleichungen benutzt werden. Das haben auch Berechnungen bei anderen Frequenzen und Grashof-Zahlen gezeigt.

Anmerkung: Ein Vergleich der Ergebnisse aus den hier verwendeten modifizierten Gleichungen mit Ergebnissen aus den modifizierten Gleichungen von Brooker machte deutlich, daß die Stromfunktionsformulierung der PSE-Gleichungen nicht äquivalent mit einer u, v -Formulierung des Problems ist. Der Grund hierfür liegt in dem Zusammenhang zwischen der Störgröße v' und der Stromfunktion Ψ' . Nach der Methode der multiplen Skalen gilt

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} = \frac{\partial \Psi'}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \frac{\partial \Psi'}{\partial \tilde{x}} = -v'. \quad (4.49)$$

Somit enthalten alle Terme mit v' schon einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ($\Psi'_{\tilde{x}}$), der jedoch in der u, v -Darstellung nicht explizit auftaucht. Dieser Effekt führt gerade bei kleinen Grashof-Zahlen zu Abweichungen in den Ergebnissen der verschiedenen Formulierungen, die aber relativ gering sind.

4.4.2 Lösung der vollständigen PSE-Gleichungen

Die Lösung der vollständigen PSE-Gleichungen verlangt das Vorhandensein sehr genauer Anfangsbedingungen. Ein ausgeprägtes transientes Verhalten (s. Anhang B) der Lösungen muß vermieden werden, da Lösungen im Bereich kleiner Grashof-Zahlen gesucht sind und keine Möglichkeit besteht, den Beginn der Integration zu noch kleineren Grashof-Zahlen zu verschieben.

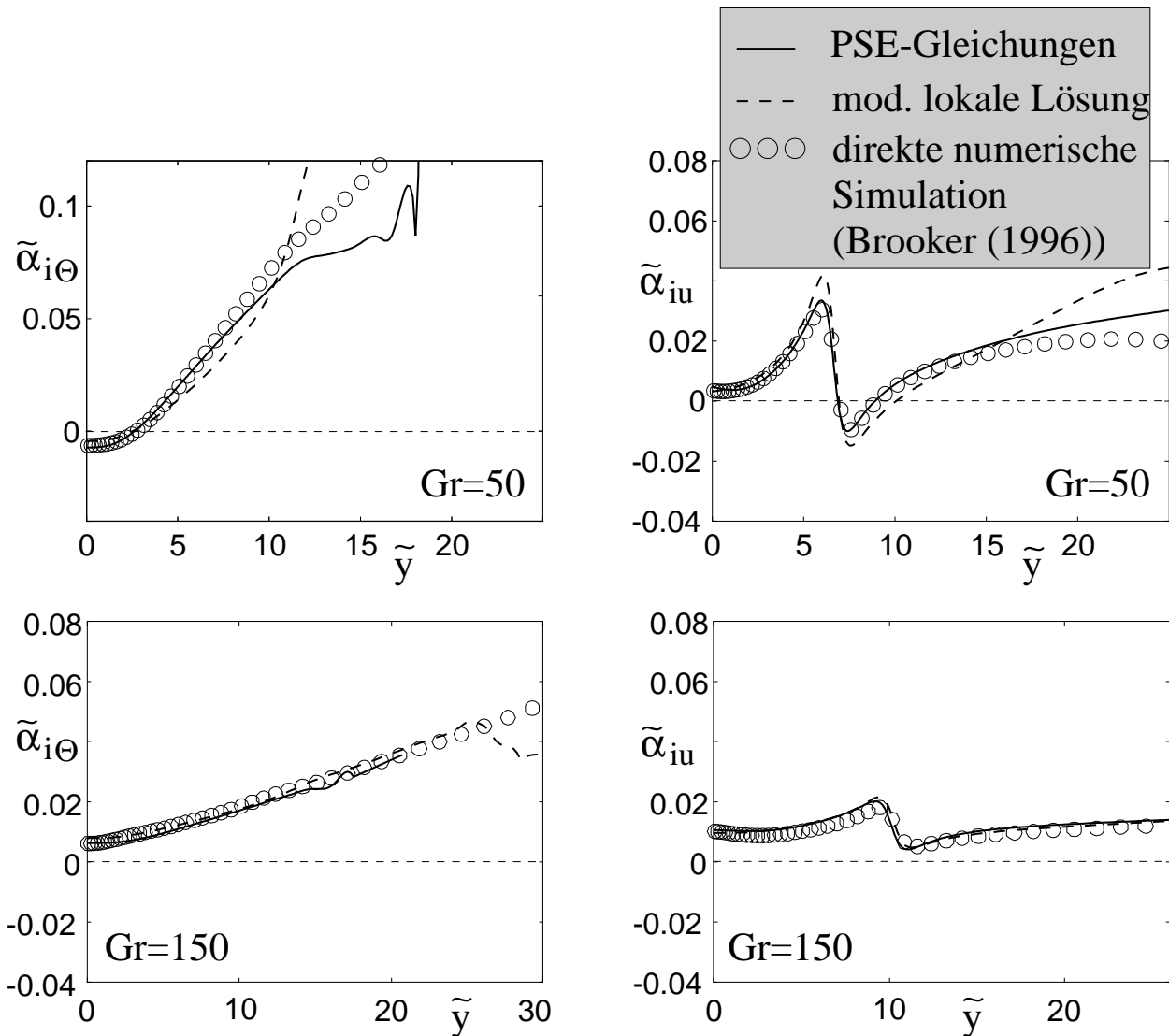


Abb. 4.11 : Vergleich der PSE-Lösungen (nach Gleichung (2.12)–(2.14)) und Lösungen der modifizierten Gleichungen (4.46) mit Lösungen aus einer direkten numerischen Simulation von Brooker (1996) ($Pr = 7.0$, $F = 0.314$)

Aber auch die modifizierten Gleichungen für die lokalen Lösungen sind im Bereich kleiner Grashof-Zahlen ($Gr < 50$) nicht mehr genau genug. Dadurch wird es nahezu unmöglich, ein genaues Ergebnis für die kritische Grashof-Zahl mittels der PSE-Gleichungen zu berechnen. Gerade für hohe Prandtl-Zahlen liegen die kritischen Werte bei Grashof-Zahlen um $Gr_{krit} = 30$.

Dennoch, die Berechnungen mittels der PSE-Gleichungen zeigen bessere Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der direkten numerischen Simulation als die modifizierten Gleichungen für die lokalen Lösungen. Abbildung 4.11 zeigt den Vergleich zwischen DNS-Rechnungen (Brooker (1996)) und Lösungen der PSE-Gleichungen. Zusätzlich sind die Lösungen der modifizierten Gleichungen (4.46) eingezeichnet. Abbildung 4.11 zeigt wiederum die Anfachungsraten als Funktionen von \tilde{y} . Der Unterschied zwischen PSE-Gleichungen und den modifizierten lokalen Lösungen wird gerade bei kleineren Grashof-Zahlen sehr deutlich sichtbar. D.h., daß eine Entwicklung der PSE-Gleichungen bis zur 1. Ordnung in x -Richtung in diesem Fall nicht mehr alle Effekte korrekt erfaßt, da die Änderungen mit x nicht ausreichend genau wiedergegeben werden können. Die durch die PSE-Gleichung berechneten Anfachungsraten der Temperaturstörungen wie auch die der Geschwindigkeitsschwankungen geben die Physik im wandnahen Bereich besser wieder.

Eine Auftragung der Anfachungsraten über der lokalen Grashof-Zahl zeigt Abbildung 4.12. Dort ist ein Vergleich zwischen den PSE-Rechnungen, den modifizierten lokalen Lösungen und den Ergebnissen der Orr-Sommerfeld-Analyse zu sehen. Mit den PSE-Gleichungen bzw. den modifizierten Gleichungen wird es nun auch möglich sowohl die Anfachungsraten der Schwankungsgeschwindigkeit u' als auch die der Schwankungstemperatur T' zu bestimmen. Wie zu erwarten war bestehen die größten Differenzen zwischen den einzelnen Ergebnissen im Bereich kleiner Grashof-Zahlen. Auch die schon angedeutete Abweichung der lokalen Lösungen von denen der vollständigen PSE-Gleichungen ist im Bereich kleiner Grashof-Zahlen relativ groß, und nimmt dann zu großen Grashof-Zahlen hin ab.

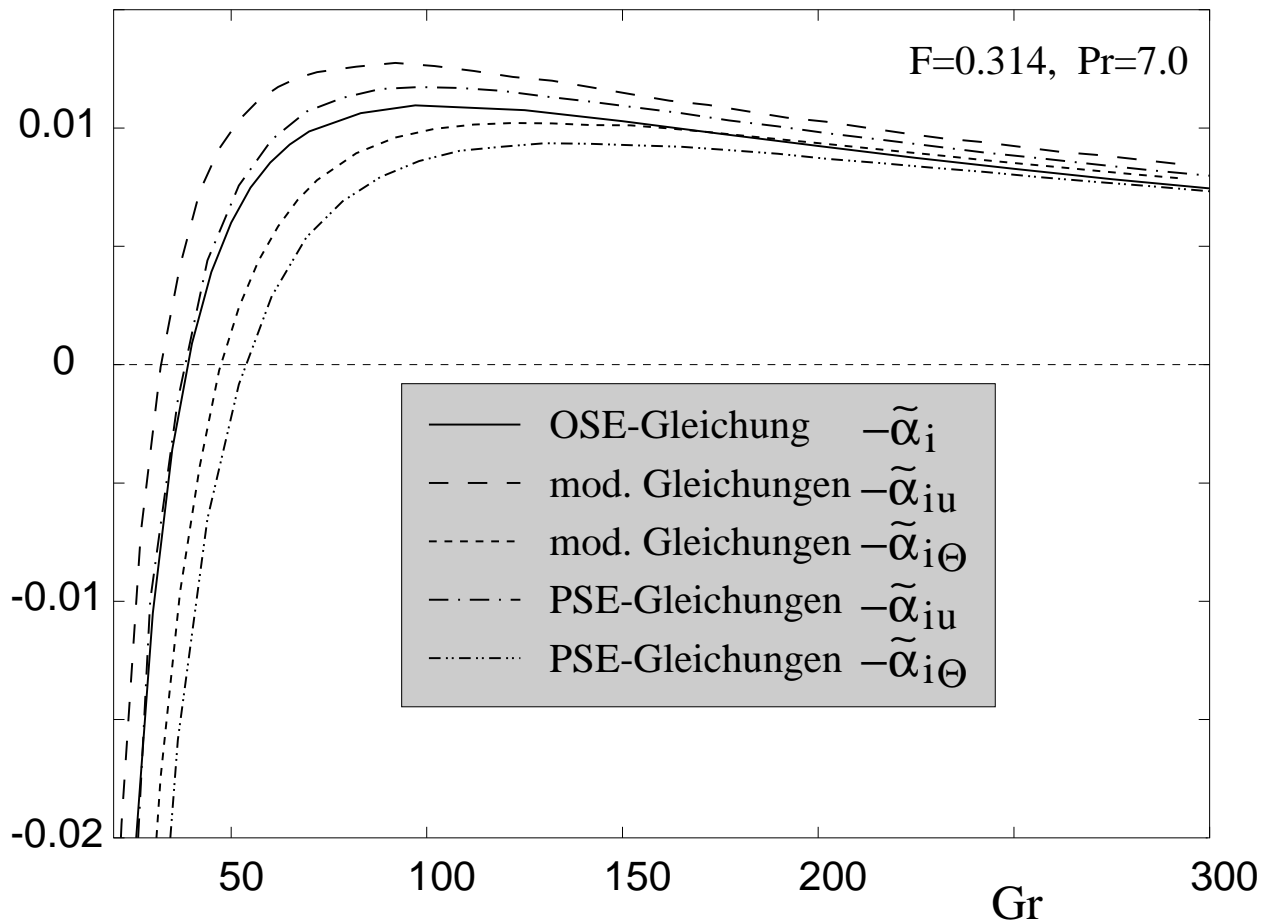


Abb. 4.12 : Anfachungsraten $\tilde{\alpha}_{iu}$ und $\tilde{\alpha}_{i\Theta}$ der Geschwindigkeits- und Temperaturschwankungen. Vergleich zwischen PSE-Lösungen, Lösungen der modifizierten Gleichungen (4.46) und OSE-Lösungen ($Pr = 7.0$, $F = 0.314$)

Auffällig ist auch, daß die Anfachungsrate für die Temperaturschwankungen immer kleiner ist als die für die Geschwindigkeitsschwankungen. Somit kann davon ausgegangen werden, daß Temperaturschwankungen erst weiter stromabwärts instabil werden als Geschwindigkeitststörungen. Godaux und Gebhard (1973) untersuchten das Temperaturschwankungsfeld an der vertikalen beheizten Platte. Sie unterschieden zwischen zwei Transitionsgebieten. In dem 1. Gebiet verliert das Geschwindigkeitsfeld seine laminare Form und der Transitionsprozeß beginnt. Darauf folgend setzt in dem 2. Gebiet die "thermische Transition" ein, d.h. das Temperaturfeld durchläuft einen Umbildungsprozeß. Diese Abfolge entspricht in etwa den durch die PSE-Gleichungen berechneten Ergebnissen für das Verhalten primärer Störungen.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß es natürlich noch andere Lösungen der modifizierten Gleichungen gibt, da es sich hierbei um ein Eigenwertproblem mit einer ganzen Reihe von Eigenwerten handelt. Es ist bei den Ergebnissen jedoch darauf geachtet worden möglichst den Eigenwert zu bestimmen, der eine physikalisch korrekte Lösung liefert. Das Kriterium hierfür war der Vergleich mit der DNS-Lösung von Brooker (1996).

Ein Vergleich der Indifferenzkurven nach der PSE-Analyse mit der neutralen Kurve aus der Orr-Sommerfeld-Analyse für die Prandtl-Zahl $Pr = 0.733$ ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Es zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen beiden Theorien. Anders als bei der erzwungenen Konvektion an der ebenen Platte (s. Kapitel 5) sind die Unterschiede im gesamten Frequenzbereich relativ groß.

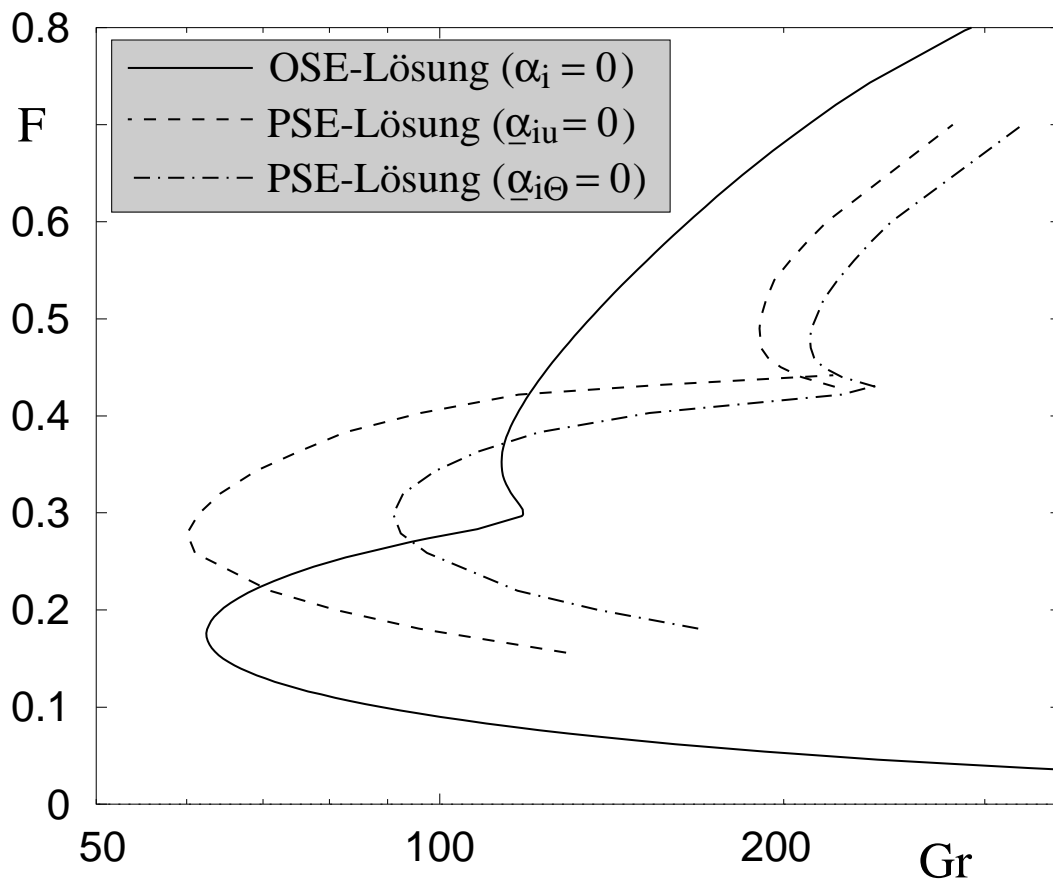


Abb. 4.13 : Vergleich der Indifferenzkurven aus der PSE-Analyse mit der neutralen Kurve aus der OSE-Analyse ($Pr = 0.733$)

Das kann zum einen mit dem grundsätzlichen Unterschied der beiden Theorien begründet werden, der auf der willkürlichen Definition der Anfachungsrate bei der PSE-Analyse basiert, und zum anderen ist dieser Unterschied gerade bei kleinen Grashof-Zahlen zu erwarten, da hier mit dem verstärkten Einfluß der Nichtparallelität gerechnet werden muß. Für $Gr \rightarrow \infty$ sollten dann jedoch beide Theorien die gleichen Ergebnisse liefern. Um dies zu zeigen sind in Abbildung 4.14 noch einmal die Anfachungsraten nach beiden Theorien in Abhängigkeit von der Grashof-Zahl dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Anfachungsraten aus beiden Theorien für die gezeigten Frequenzen für $Gr \rightarrow \infty$ gegen denselben Grenzwert streben.

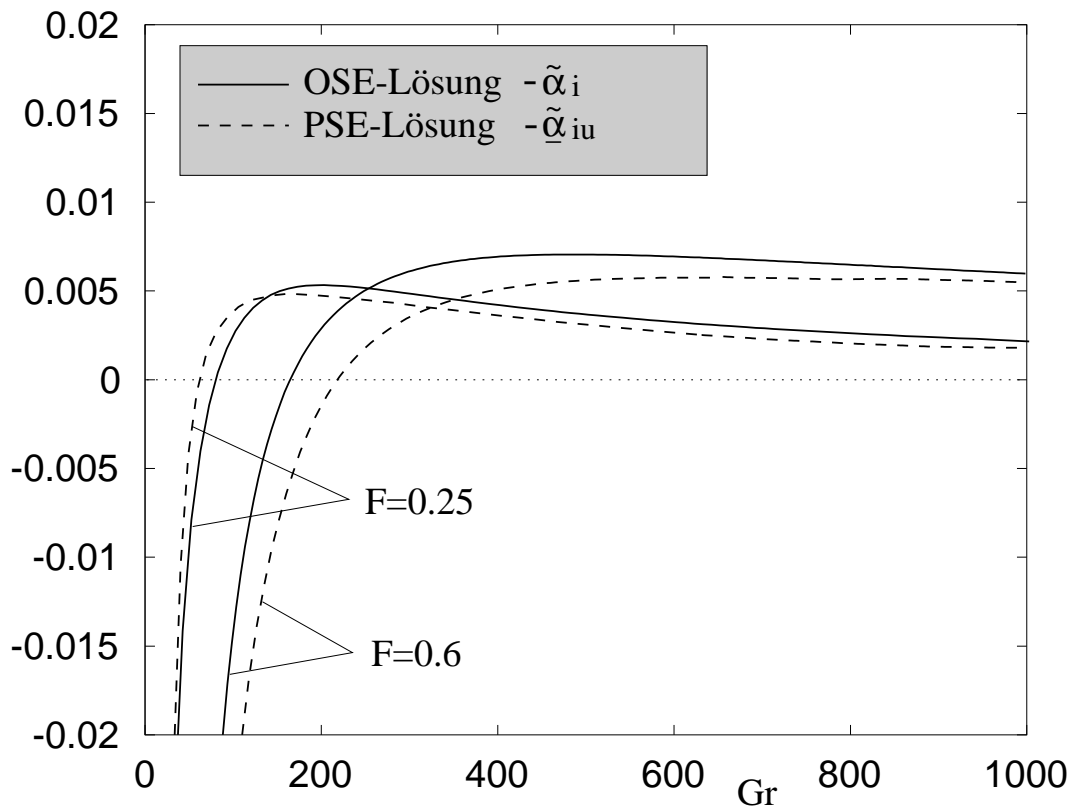


Abb. 4.14 : Vergleich der Anfachungsraten $\tilde{\alpha}_{iu}$ aus der PSE-Analyse mit $\tilde{\alpha}_i$ aus der OSE-Analyse für verschiedene Frequenzen ($Pr = 0.733$)

Die in Abbildung 4.13 gezeigten Indifferenzkurven aus der PSE-Analyse weisen genau wie die neutrale Kurve aus der Orr-Sommerfeld-Analyse eine Zweiteilung auf. Es zeigte sich bei den PSE-Rechnungen, daß der obere Ast aus einer 2. Lösung des Systems hervorgeht, einer sogenannten **Sekundärlösung**, welche

unabhängig von der primären Lösung (unterer Ast) ist (s. Kapitel 4.3). Inwieweit eine solche Lösungsstruktur bei anderen Prandtl-Zahlen vorliegt oder ob sogar weitere unabhängige Lösungen existieren, soll in Zukunft geklärt werden.

Die numerische Lösung der PSE-Gleichungen erwies sich als besonders schwierig bei niedrigen Frequenzen und kleinen Grashof-Zahlen, da dort zum einen große Wellenlängen vorliegen und zum anderen die Anfangsbedingungen nicht genau genug durch die modifizierten Gleichungen vorgegeben wurden. Eine von Li und Malik (1996) durchgeführte Stabilitätsanalyse des Berechnungsverfahrens zur Lösung der PSE-Gleichungen zeigt, daß die Schrittweite als $\Delta\hat{x} \sim 1/\alpha_r$ zu wählen ist. Gerade für niedrige Frequenzen kann dann aber keine genaue Auflösung des Rechengebietes gewährleistet werden, da die Schrittweiten sehr groß gewählt werden müssen, und es treten Fehler bei der Bestimmung der indifferenten Zustände auf.

4.5 Zusammenfassung

Der Einfluß temperaturabhängiger Stoffwerte auf die kritische Grashof-Zahl ist mittels der erweiterten Orr-Sommerfeld Analyse bestimmt worden. Die Ergebnisse liegen in Form von Einflußfunktionen als Stoffwerteffekte 1. Ordnung für einen Prandtl-Zahlenbereich von $Pr = 0.7$ bis $Pr = 10.0$ vor. Da die Einflußfunktionen als universelle Funktionen der Prandtl-Zahl angesehen werden können, ist es nun möglich für jedes beliebige Fluid die Effekte der einzelnen Stoffwerte auf den kritischen Wert der Grashof-Zahl unter Hinzunahme der entsprechenden Stoffkennzahlen (K -Zahlen) zu bestimmen.

Im Gegensatz zu Darstellungen in der Literatur wurde der Effekt variabler Viskosität als stabilisierend für $T_w^* < T_\infty^*$ und als destabilisierend für $T_w^* > T_\infty^*$ gefunden. Dies ist auf eine andere Wahl der Bezugstemperatur zurückzuführen. Es wurde die Umgebungstemperatur T_∞^* an Stelle der Filmtemperatur T_{film}^* verwendet.

In vielen Studien sind Stabilitätsuntersuchungen an einer Wasserströmung

durchgeführt worden. Gerade für dieses Fluid zeigte sich, daß bei einer Umgebungstemperatur von $T_\infty^* = 20^\circ\text{C}$ ein besonderer Effekt auftritt. Die besonderen Stoffeigenschaften von Wasser in diesem Temperaturbereich ($K_{\rho A} = 15.89$) führen dazu, daß der Dichteeffekt und im besonderen die Dichtevariation im Auftriebsterm die Stabilität der Strömung stark beeinflusst. Durch die Berücksichtigung aller Effekte kommt es so zur Stabilisierung der Strömung bei $T_w^* > T_\infty^*$ bzw. zu einer Destabilisierung bei $T_w^* < T_\infty^*$. Der Viskositätseffekt ist daher hier nicht der entscheidende Effekt.

Die PSE-Gleichungen sind im letzten Teil des voranstehenden Kapitels erfolgreich angewendet worden. Gute Übereinstimmung zwischen PSE-Ergebnissen und Ergebnissen der modifizierten Gleichungen sowie der DNS-Rechnungen von Brooker (1996) sind gefunden worden. Dabei zeigte sich eine bessere Übereinstimmung der Ergebnisse aus den vollständigen PSE-Gleichungen mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation von Brooker (1990), als bei einem Vergleich der modifizierten Gleichungen mit den DNS-Rechnungen. Die modifizierten Gleichungen können im Bereich kleiner Grashof-Zahlen die x -Abhängigkeit der Lösung nicht genau genug erfassen, da sie aus einer Entwicklung der PSE-Gleichung bis zur 1. Ordnung in x gewonnen wurden. Weiterhin wurde gezeigt, daß die Lösungen der PSE-Gleichungen für große Grashof-Zahlen erwartungsgemäß mit den Lösungen der Orr-Sommerfeld-Gleichungen zusammenfallen. Jedoch zeigten die Indifferenzkurven aus beiden Theorien ($Gr < 350$) relativ große Abweichungen voneinander. Dies ist zum einen eine Folge der willkürlichen Definition der Anfachungsrate bei einer PSE-Analyse, und zu anderen ist es auf die Nichtparallelitätseffekte zurückzuführen, welche gerade im Bereich kleiner Grashof-Zahlen großen Einfluß haben.

5 Die Stabilität der Grenzschicht mit Druckgradient; schwach gekoppeltes Problem

5.1 Vorbemerkungen

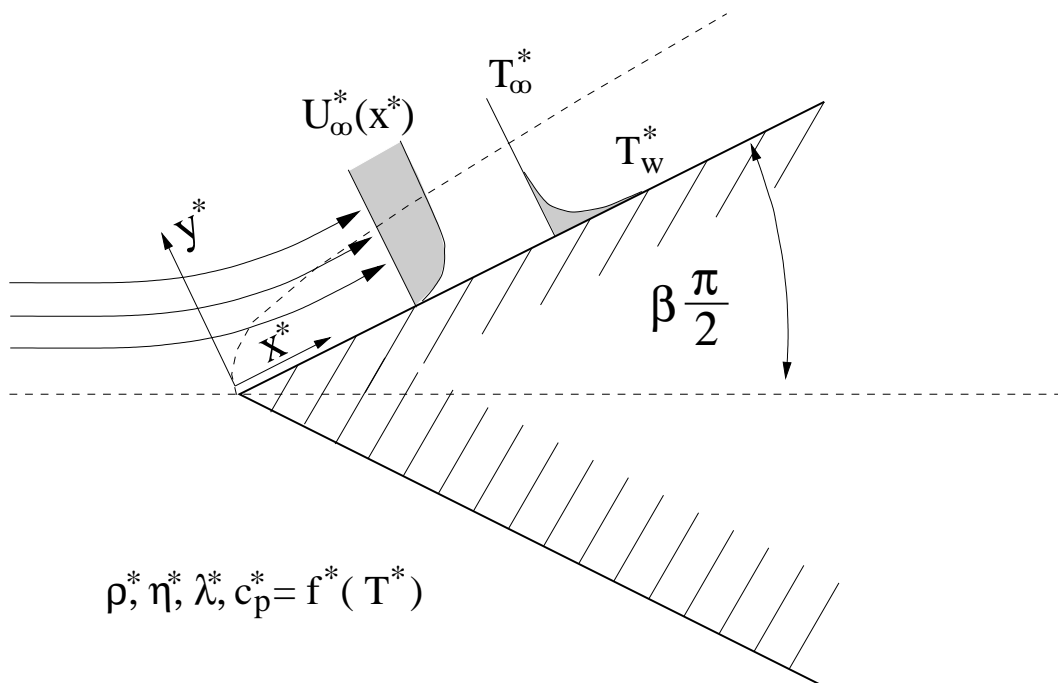


Abb. 5.1 : Schematische Darstellung der Grenzschichtströmung am Keil (Falkner-Skan-Strömung)

Es wird die Grenzschichtströmung am Keil nach Abbildung 5.1 betrachtet. Diese Grenzschichten trifft man bei der Umströmung eines halbunendlichen Keils an. Die dazugehörige Potentialströmung ist $U(x) \sim x^m$, wobei m mit dem Keilwinkelfaktor β über die Beziehung $m = \beta/(2 - \beta)$ verknüpft ist. Ein Spezialfall der oben skizzierten Strömung ist die Grenzschicht an der ebenen Platte ($\beta = 0$). In der Literatur finden sich zu diesem Fall etliche Arbeiten, da die Platten-grenzschicht mehr oder weniger als Referenz für alle anderen Grenzschichten angesehen wird.

Die ersten Arbeiten über die Stabilität der Plattengrenzschicht sind von Tollmien und Schlichting 1929 und 1933 durchgeführt worden. Weitere theoretische und experimentelle Arbeiten folgten von Schubauer und Skramstadt (1948), Jordinson (1970, 1971) und vielen anderen. Die Abweichung der theoretisch errechneten Werte für die kritische Reynolds-Zahl ($Re_{krit} = 520$) von dem experimentell bestimmten Wert von $Re_{krit} = 400$ (Ross et al. (1979)) wurde der Vernachlässigung der nichtparallelen Effekte in der Theorie zugeschrieben. Um diese Diskrepanz aufzulösen, bezog Bouthier (1972, 1973) die Nichtparallelität der Grundströmung in sein Modell mit ein. Als Ergebnis erhielt er eine kleinere kritische Reynolds-Zahl, als es die Experimente voraussagen. Gaster (1974) präsentierte eine Analyse, die zeigte, daß nichtparallele Effekte nur wenig Einfluß auf die Differenz zwischen Experiment und Theorie haben. Van Stijn und Van de Vooren (1983) bestätigten diese Ergebnisse. Die Differenz zum Experiment jedoch blieb bestehen und ist im Bereich der hohen Frequenzen angesiedelt. Wie man weiß, ist das der Bereich in dem Störungen nur schwach angefacht werden. Im Gegensatz dazu können niedrigere Frequenzen recht gut mit der linearen Stabilitätstheorie modelliert werden, und gerade sie leiten den Transitionsprozeß ein.

Neuere Arbeiten basieren auf den PSE-Gleichungen (Herbert, Bertolotti (1987), Bertolotti (1991)) oder auf direkten numerischen Simulationen (Fasel, Konzelmann (1990)).

In diesem Kapitel wird der Einfluß eines Temperaturfeldes auf die Stabilität der Grenzschichtströmung analysiert. Eine grundlegende Arbeit zu diesem Thema ist von Wazzan et al. (1972) verfaßt worden. Sie untersuchten den Effekt temperaturabhängiger Viskosität auf die Stabilität der Plattengrenzschicht in Wasser und fanden heraus, daß die Beheizung der Grenzschicht die kritische Reynolds-Zahl von 520 auf ca. 16000 erhöhen kann. Umgekehrt wirkt sich Kühlen auf die Plattengrenzschicht in Wasser destabilisierend aus. Strazisar et al. (1977) wiesen diesen Trend experimentell nach, während Herwig und Schäfer (1992) sowie Schäfer et al. (1995) den Effekt variabler Viskosität und Dichte auf das Sta-

bilitätsverhalten mittels asymptotischer Reihenentwicklung untersucht und ähnliche Ergebnisse erhielten. Weitere Arbeiten, die die gezielte Beeinflussung der Stabilität von Grenzschichten durch Heizen und Kühlen mittels spezieller Wandtemperaturverteilungen behandeln, sind z.B. von Lee et al. (1990), Strazisar und Reshotko (1978), Nayfeh und El-Hady (1979) sowie Masad und Nayfeh (1992) und Brooker et al. (1998) veröffentlicht worden.

In den meisten Fällen sind jedoch Ergebnisse nur für spezifische Stoffe bereitgestellt worden, oder die Analysen basieren lediglich auf der Einbeziehung von Viskositäts- bzw. Dichteeffekten. Eine weitere Einschränkung ist die der Grenzschichtströmung ohne Druckgradienten $\partial p / \partial x = 0$. Daher ist ein Ziel dieses Kapitels, möglichst in allgemeiner Form die Effekte aller Stoffwerte auf die Stabilität sowohl der Plattengrenzschicht als auch der Grenzschichten mit Druckgradient zu analysieren. Dabei wird zunächst die lokale parallele Stabilitätsanalyse angewandt, um allgemeine Beziehungen für die kritische Reynolds-Zahl anzugeben. Diese Ergebnisse werden dann mit der nichtlokalen nichtparallelen Stabilitätsanalyse (PSE-Analyse) verglichen, um festzustellen inwiefern Nichtparallelitätseffekte für die Stabilität der Grenzschichten mit Wärmeübergang eine Rolle spielen.

5.2 Grundströmung

Analog zu der Grundströmung in Kapitel 4 lassen sich die Grenzschichtgleichungen für die erzwungene Konvektion herleiten. Lediglich der Auftriebsterm wird hier vernachlässigt. Die entsprechende Ähnlichkeitstransformation lautet

$$(x^*, y^*) \rightarrow (x, \eta_s); \quad x = \frac{x^*}{L_B^*}; \quad \eta_s = \frac{y^*}{\delta^*(x^*)} \quad \text{mit:} \quad \delta^*(x^*) = \sqrt{\frac{x^* \nu_\infty^*}{U_B^* (m+1)}}. \quad (5.1)$$

Die Bezugsgeschwindigkeit ergibt sich aus potentialtheoretischen Berechnungen der Außenströmung und ist durch den Ausdruck $U_B^* = U^*(x^*) = U_\infty^* B x^m$ ($B = B^* L^{*m} / U_\infty^*$) gegeben. Als Bezugstemperaturdifferenz wird $\Delta_B T^* = T_w^* - T_\infty^* =$

$(T_w^* - T_\infty^*)_L x^e$ eingeführt, damit die Randbedingungen unabhängig von x sind (s. Gersten, Herwig (1992)). Mit der Stromfunktion (s. Kapitel 4)

$$f(x, \eta_s) = \frac{\Psi(x, y)}{U_B(x)\delta(x)} \quad (5.2)$$

erhält man die Grenzschichtgleichungen für die Strömung am Keil mit variablen Stoffwerten zu

$$\left(\bar{\eta} \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right)' \right)' + \frac{1}{2} f \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right)' + \frac{m}{m+1} \left(1 - \frac{f'^2}{\bar{\rho}} \right) = \frac{x}{m+1} \left[f' \frac{\partial (f'/\bar{\rho})}{\partial x} - \left(\frac{f'}{\bar{\rho}} \right)' \frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad (5.3)$$

$$(\bar{\lambda}\bar{\Theta}')' + \frac{1}{2} Pr \bar{c}_p \left(f\bar{\Theta}' - \frac{2e}{m+1} f' \bar{\Theta} \right) = \frac{Pr \bar{c}_p x}{m+1} \left[f' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x} - \bar{\Theta}' \frac{\partial f}{\partial x} \right]. \quad (5.4)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \eta_s = 0 & : f = f' = \bar{\Theta} - 1 = 0, \\ \eta_s \rightarrow \infty & : f' - 1 = \bar{\Theta} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nur für den Fall $T_w = konst.$ ($e = 0$) beschreiben die Gleichungen (5.3)–(5.5) selbstähnliche Strömungen. In allen anderen Fällen liegen sogenannte quasi-selbstähnliche Grenzschichten vor, so daß (5.3)–(5.5) mittels einer speziellen Entwicklung, die die Temperaturverteilung auf der Wand berücksichtigt, auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden können. Mit den Ansätzen

$$a = 1 + \varepsilon K_a x^e \bar{\Theta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2); \quad (a = \bar{\rho}, \bar{\eta}, \dots), \quad (5.6)$$

für die Stoffwertentwicklungen und

$$b = b_0 + \varepsilon K_a x^e b_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2); \quad (b = f, \bar{\Theta}), \quad (5.7)$$

für die Entwicklungen der abhängigen Größen ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

0. Ordnung $\mathcal{O}(1)$:

$$f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' + \frac{m}{m+1} (1 - f_0'^2) = 0 \quad (5.8)$$

$$\bar{\Theta}_0'' + \frac{1}{2} Pr \left(f_0 \bar{\Theta}_0' + \frac{2e}{m+1} f_0' \bar{\Theta}_0 \right) = 0 \quad (5.9)$$

1. Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} f_\rho''' + \frac{1}{2} (f_\rho f_0'' + f_\rho'' f_0) - \frac{2m}{m+1} f_\rho' f_0' - \frac{e}{m+1} (f_0' f_\rho' - f_0'' f_\rho) = \\ (\bar{\Theta}_0' f_0')' + \bar{\Theta}_0' \left(f_0'' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' \right) - \frac{m}{m+1} \bar{\Theta}_0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} f_\eta''' + \frac{1}{2} (f_\eta f_0'' + f_\eta'' f_0) - \frac{2m}{m+1} f_\eta' f_0' - \frac{e}{m+1} (f_0' f_\eta' - f_0'' f_\eta) = \\ - (\bar{\Theta}_0 f_0'')' \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \eta_s = 0 \quad : \quad f_0 = f_\rho = f_\eta = f_0' = f_\rho' = f_\eta' = \bar{\Theta}_0 - 1 = 0, \\ \eta_s \rightarrow \infty \quad : \quad f_0' - 1 = f_\rho' = f_\eta' = \bar{\Theta} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Lösungen der Gleichungen (5.8)–(5.12) sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Anhand der Geschwindigkeitsprofile \bar{u}_ρ und \bar{u}_η für die 1. Ordnung läßt sich schon erkennen, daß die Effekte variabler Stoffwerte stark vom Druckgradienten in der Außenströmung abhängen. Ein weiterer Parameter ist die Prandtl-Zahl, so daß eine umfassende allgemeine Aussage über die verschiedenen Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte in Grenzschichten mit Druckgradient sehr schwierig ist. Im nächsten Kapitel sollen dennoch Ergebnisse für einen möglichst großen Parameterraum angegeben werden.

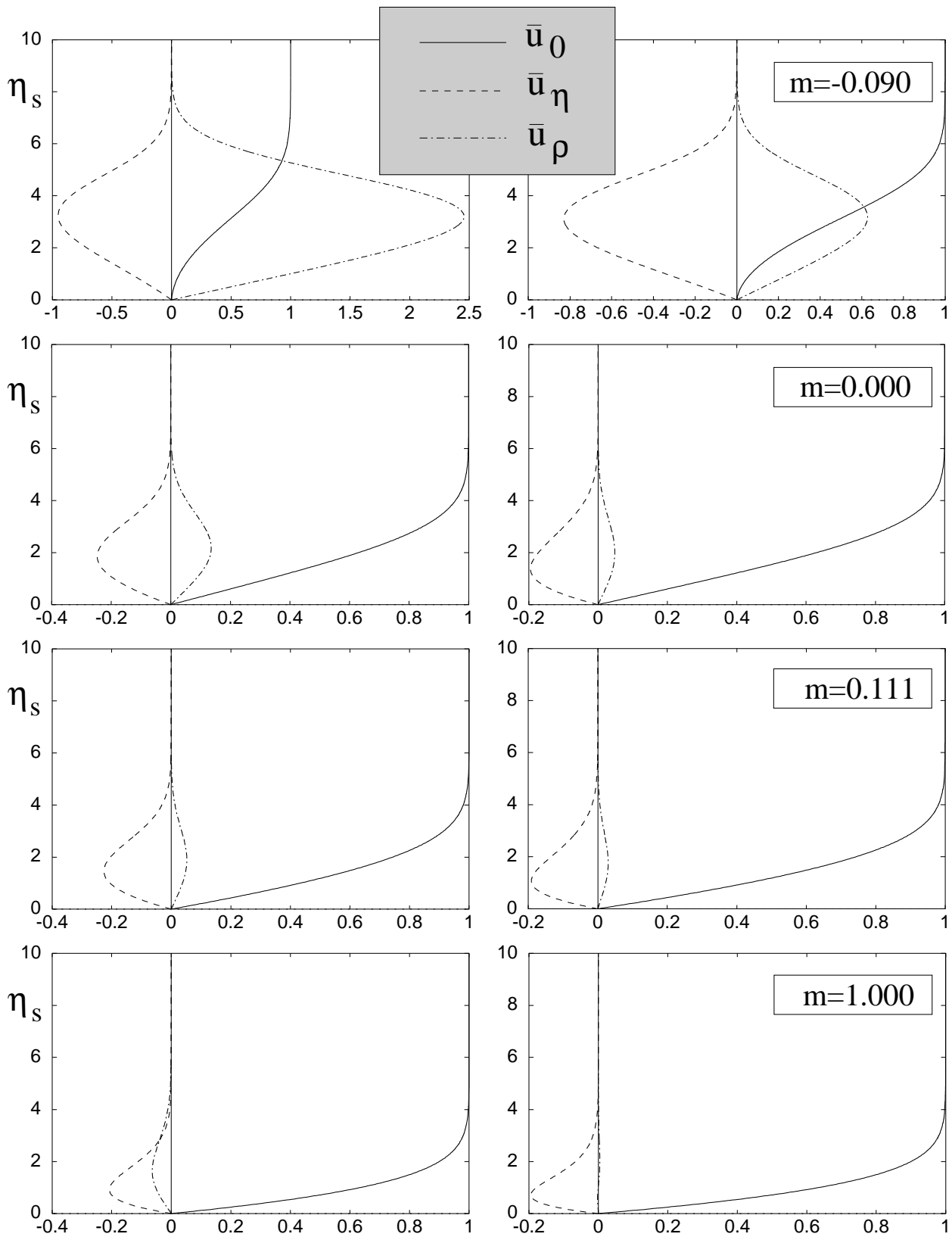


Abb. 5.2 : Geschwindigkeitsverteilung 0. und 1. Ordnung für die Grenzschicht am Keil bei verschiedenen Keilwinkeln $\beta = 2m/(m + 1)$ (links: $Pr = 0.7$, rechts: $Pr = 8.1$, $T_w = \text{konst.}$)

5.3 Lokale parallele Stabilitätsanalyse der Grenzschichtströmung mit Druckgradient und Wärmeübergang

Die lokale parallele Stabilitätsanalyse wird mittels der schon in Kapitel 2.2.3 angegebenen Gleichungen

$$[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \vec{\Psi} = \{0, 0, 0\}^T \quad (5.13)$$

durchgeführt. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} y = 0 & : \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta} = 0 \quad (T_w = \text{konst.}), \\ & \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta}' = 0 \quad (q_w = \text{konst.}), \\ y = \infty & : \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{\Theta} = 0 \quad (T_w = \text{konst.}, q_w = \text{konst.}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

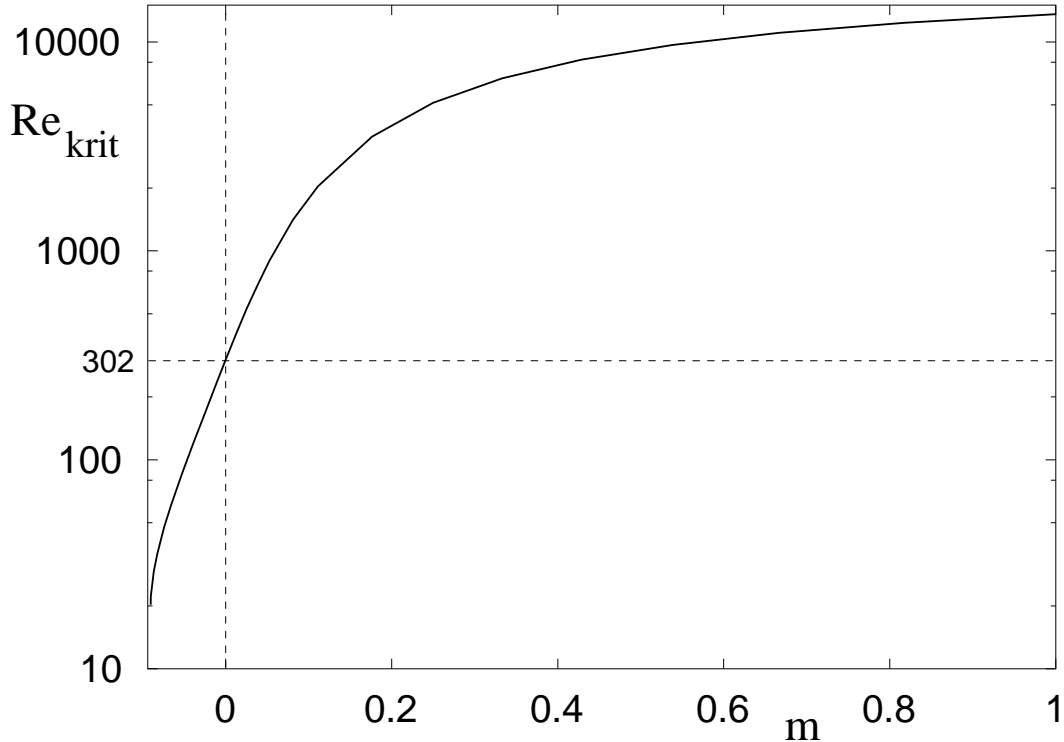


Abb. 5.3 : Kritische Reynolds-Zahl als Funktion des Exponenten m für den isothermen Fall (konstante Stoffwerte)

Mit den Kennzahlen $K_1 = (g^* L_B^*)/U_B^{*2} = Fr^{-2} \rightarrow 0$ (Vernachlässigung des Auftriebterms), $K_2 = \nu_B^*/U_B^* L_B^* = \nu_\infty^*/U_\infty^* \delta^*(x) = Re^{-1}$ und $K_3 = K_2/Pr =$

$(Re Pr)^{-1}$ ist das Problem vollständig beschrieben. Lösungen der Gleichung (5.13) für konstante Stoffwerte (0. Ordnung) sind in Form der kritischen Reynolds-Zahl als Funktion des Exponenten m in Abbildung 5.3 aufgetragen. Der Kurvenverlauf zeigt, daß verzögerte Strömungen $m < 0$ destabilisiert werden, beschleunigte Strömungen $m > 0$ hingegen werden stabilisiert.

Im folgenden soll der Effekt temperaturabhängiger Stoffwerte auf das Stabilitätsverhalten der Grenzschicht mit Druckgradient untersucht werden.

Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte

Wie schon in den vorangegangenen Kapiteln 3 und 4 ist auch hier das Ziel, eine möglichst allgemeingültige Darstellung für die kritischen Parameter des Problems zu erhalten. Die asymptotische Entwicklung der kritischen Reynolds-Zahl ergibt in Anlehnung an die Entwicklungen der Grundströmung

$$\begin{aligned} \frac{Re_{krit}}{Re_{krit,0}} = & 1 + \varepsilon x^e [K_\rho A_\rho(Pr) + K_\eta A_\eta(Pr)] \\ & + \varepsilon^2 x^{2e} [K_\rho^2 A_{\rho\rho}(Pr) + K_{\rho 2} A_{\rho 2}(Pr) + K_\rho K_\eta A_{\rho\eta}(Pr) \\ & + K_\rho K_\lambda A_{\rho\lambda}(Pr) + K_\rho K_c A_{\rho c}(Pr) + K_\eta^2 A_{\eta\eta}(Pr) + K_{\eta 2} A_{\eta 2}(Pr) \\ & + K_\eta K_\lambda A_{\eta\lambda}(Pr) + K_\eta K_c A_{\eta c}(Pr) + K_\lambda^2 A_{\lambda\lambda}(Pr) + K_{\lambda 2} A_{\lambda 2}(Pr) \\ & + K_\lambda K_c A_{\lambda c}(Pr) + K_c^2 A_{cc}(Pr) + K_{c 2} A_{c 2}(Pr)] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aufgrund der hierarchischen Ordnung der Stoffwerteffekte (s. Abbildung 2.5) kommen Effekte temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit und spezifischer isobarer Wärmekapazität erst in der zweiten Ordnung vor. Es ist daher davon auszugehen, daß der größte Effekt von der Dichte- und der Viskositätsvariation herrührt. Gleichung (5.15) zeigt, daß zur Bestimmung aller Einflußfunktionen bis zur 2. Ordnung 16 Gleichungen notwendig sind. Da eine entsprechende Entwicklung sehr aufwendig ist, kommt auch hier die kombinierte Methode zur Bestimmung der Einflußfunktionen zum Einsatz. Die Einflußfunktionen der 1.

Ordnung können in Abbildung 5.4 und 5.5 für die verschiedenen Exponenten m abgelesen werden.

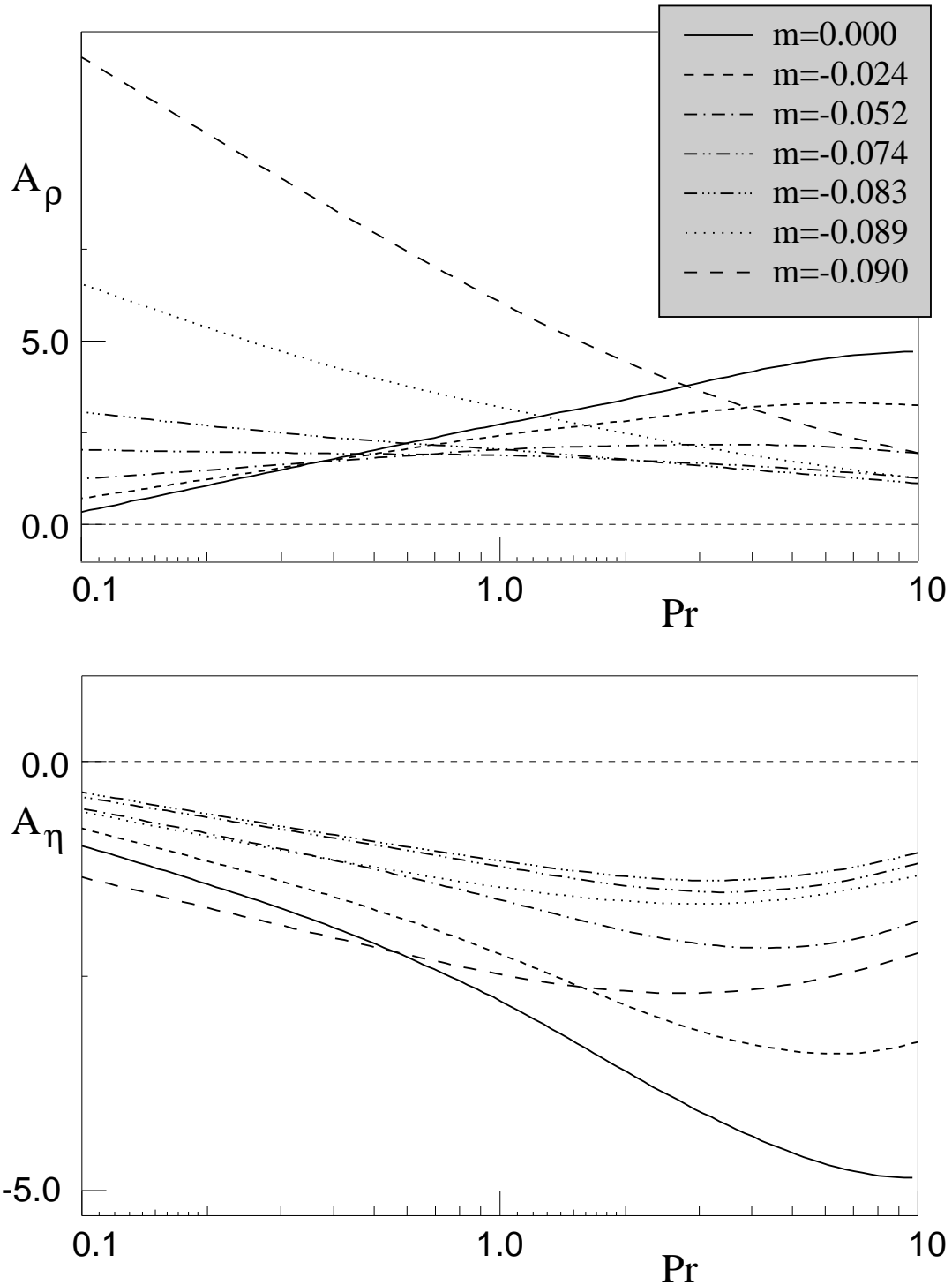


Abb. 5.4 : *Einflußfunktionen A_ρ und A_η als Funktion der Prandtl-Zahl für verschiedene Exponenten $m < 0$ ($T_w = \text{konst.}$)*

Abbildung 5.4 und 5.5 zeigen deutlich die schon an der Grundströmung erkennbaren Einflüsse des Druckgradienten auf die Einflußfunktionen 1. Ordnung.

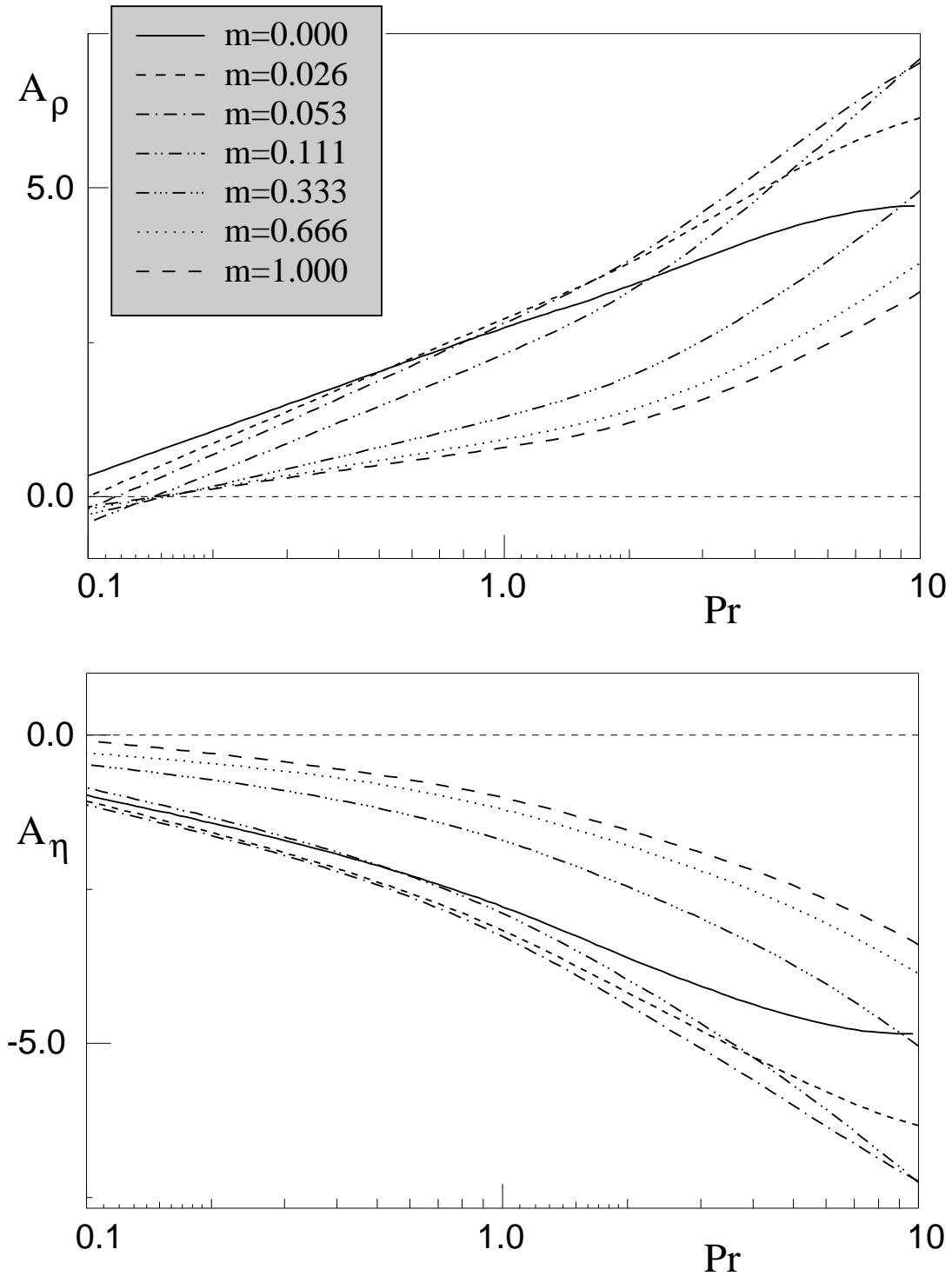


Abb. 5.5 : *Einflußfunktionen A_ρ und A_η als Funktion der Prandtl-Zahl für verschiedene Exponenten $m > 0$ ($T_w = \text{konst.}$)*

Der Einfluß auf die kritische Reynolds-Zahl wird erkennbar, wenn man $Re_{krit}/Re_{krit,0} = 1 + \varepsilon(K_\eta A_\eta + K_\rho A_\rho)$ über der Heizrate aufträgt, wie es in Abbildung 5.6 geschehen ist.

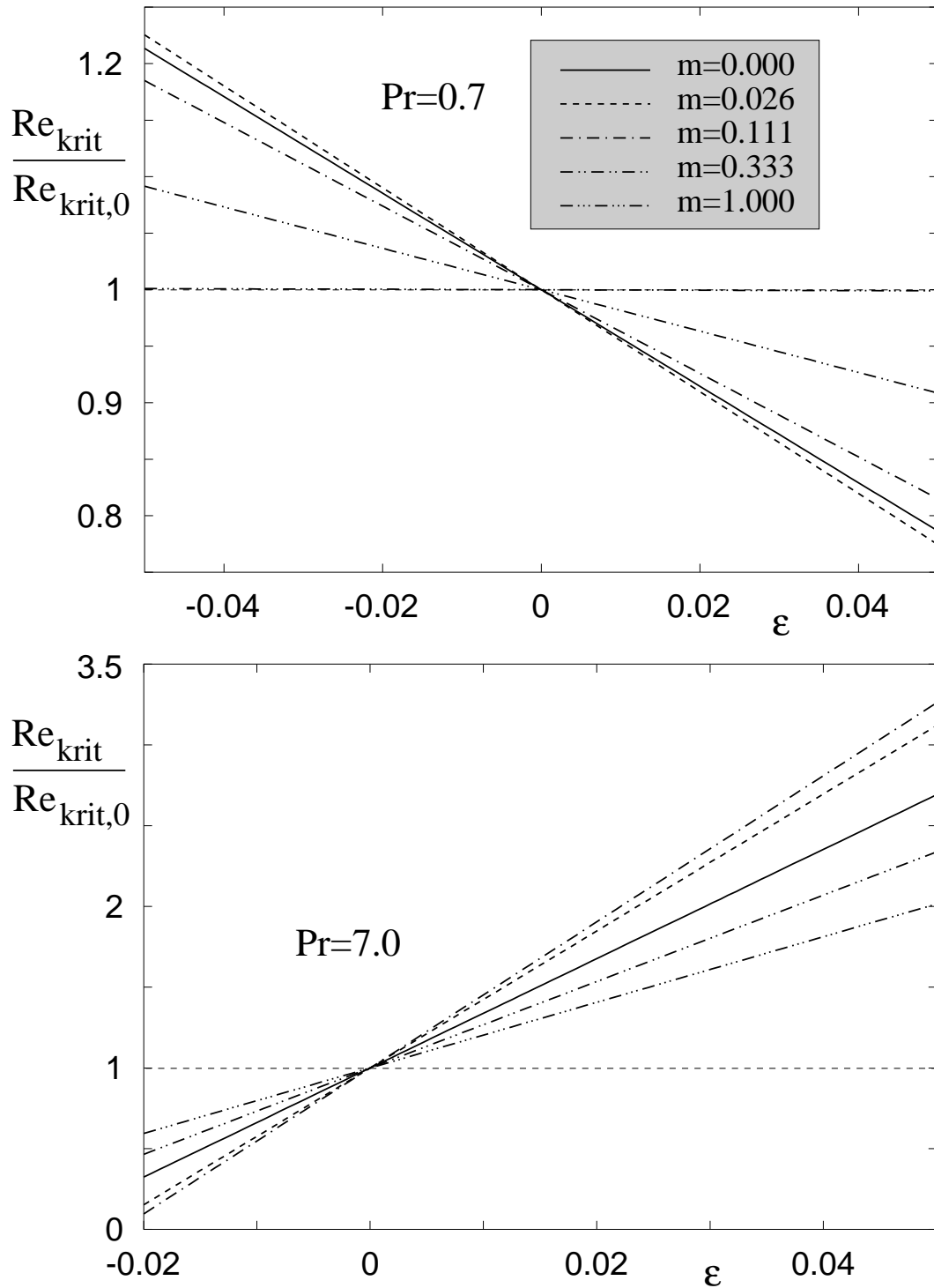


Abb. 5.6 : *Einfluß variabler Stoffwerte auf die kritische Reynolds-Zahl für verschiedene Exponenten $m > 0$ (Effekte 1. Ordnung (εK_ρ , εK_η): $T_w = \text{konst.}$, K -Werte nach Tabelle 2.2).*

Der bekannte Effekt der Destabilisierung einer Grenzschichtströmung in Gasen, sowie der Stabilisierung von Grenzschichtströmungen in Flüssigkeiten durch eine erhöhte Wandtemperatur bleibt tendenziell auch bei Strömungen unter Einfluß eines Druckgradienten bestehen. Die in Abbildung 5.6 dargestellten Abhängigkeiten zeigen jedoch, daß der Einfluß temperaturabhängiger Stoffwerte auf die Stabilität einer beschleunigten Strömung ($m > 0$) zunächst mit m wächst. D.h., diese Effekte werden durch den zusätzlichen Druckgradienten anfänglich verstärkt. Mit zunehmendem Druckgefälle wird dann jedoch der Effekt der variablen Stoffwerte abgeschwächt, so daß es, wie im Falle der Gasströmung ($m = 1.0$) zur vollständigen Aufhebung aller Effekte kommen kann. Geht man von den Einzelergebnissen (Grenzschichtströmung mit variablen Stoffwerten ohne Druckgradient, Grenzschicht mit Druckgradient und konstanten Stoffwerten) aus, so könnte man vermuten, das Gesamtergebnis könne als Superponierung der Einzelergebnisse erhalten werden. Dies ist nicht der Fall, wie anhand von Abbildung 5.6 leicht erkennbar ist. Eine mögliche Erklärung könnte der Effekt temperaturabhängiger Dichte sein, der im Gegensatz zum Viskositätseffekt schon in der Grundströmung eine starke Abhängigkeit vom zugrundegelegten Typ der Außenströmung ($U \sim x^m$) zeigt (s. Abbildung 5.2). Da in Gasen Viskosität und Dichte etwa gleich große Absolutwerte in ihren Temperaturgradienten aufweisen (s. Tabelle 2.2), ist anzunehmen, daß die Effekte variabler Dichte dort eine erhebliche Rolle spielen. Dies erklärt auch, warum die Abschwächung der Stoffwerteinflüsse durch den Druckgradienten bei Flüssigkeiten erst bei größeren Werten von m auftritt als bei Gasen (s. Abbildung 5.6).

Für Grenzschichtströmungen bei Druckanstieg ($m < 0$) können ähnliche Aussagen gemacht werden. Hier führt eine Abnahme in m zunächst zur Abschwächung des Viskositätseffekts im gesamten Prandtl-Zahl Bereich (s. Abbildung 5.4 unten) und des Dichteeffektes im Bereich hoher Prandtl-Zahlen (s. Abbildung 5.4 oben). Für stark verzögerte Außenströmungen kehrt sich dann der Effekt um, und die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte wirkt sich wieder stärker auf die kritische Reynolds-Zahl aus. Eine Besonderheit zeigt sich für den Dichteeffekt

A_ρ bei kleinen Prandtl-Zahlen, der durch den zusätzlichen Druckgradienten in der Außenströmung stetig verstärkt wird.

5.3.1 Spezialfall: Ebene Platte ($\partial p/\partial x = 0$)

Da die ebene Platte bei Stabilitätsuntersuchungen häufig als Referenzfall betrachtet wird, und viele bis heute bekannt gewordenen Ergebnisse auf Untersuchungen der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte basieren, wird dieser Spezialfall zur Untersuchung weiterer Effekte variabler Stoffwerte herangezogen. Es handelt sich dabei um:

1. Effekte durch andere Randbedingungen ($q_w = \text{konst.}$)
2. Effekte höherer Ordnung ($A_{\rho\rho}, A_{\rho 2}, A_{\rho\eta}, \dots$)

Da die Grenzschichtgleichungen für die ebene Platte mit variablen Stoffwerten für die Randbedingung $q_w = \text{konst.}$ nicht mehr selbstähnlich sind, erfordert die Bestimmung der Einflußfunktionen für die kritische Reynolds-Zahl hier die Lösung der vollständigen partiellen Differentialgleichungen (5.3) und (5.4). Dieser Aufwand kann durch die in Kapitel 5.2 vorgeschlagene Entwicklung umgangen werden, so daß nunmehr nur die gewöhnlichen Differentialgleichungen (5.8)–(5.11) gelöst werden müssen. Mit Vorliegen der Grundströmung bis zur 1. Ordnung können dann die Einflußfunktionen $A_\rho(Pr)$ und $A_\eta(Pr)$ bestimmt werden. Um die Einflußfunktionen höherer Ordnung zu erhalten, müssen die Gleichungen (5.3)–(5.5) entweder ebenfalls bis zur entsprechenden Ordnung entwickelt werden, oder die kombinierte Methode muß auf die partiellen Gleichungen angewandt werden. Die Einflußfunktionen 1. Ordnung sind in Abbildung 5.7 denen für den Fall $T_w = \text{konst.}$ gegenübergestellt. Der Unterschied in den Randbedingungen macht sich in den Funktionen A_ρ und A_η nur geringfügig bemerkbar. Lediglich im Bereich kleiner Prandtl-Zahlen zeigt sich eine deutlichere Differenz für die Funktion A_ρ . Bei der Anwendung der Ergebnisse für den Fall $q_w = \text{konst.}$

in dimensionbehafteten Darstellungen ist jedoch auf den speziellen Ansatz bei der Entwicklung, die diesen Ergebnissen zugrundeliegt, zu achten.

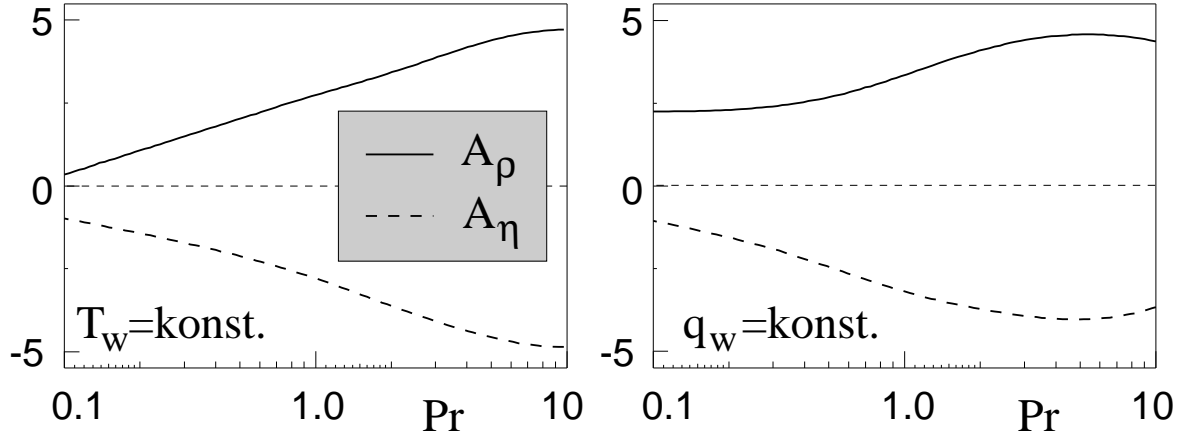


Abb. 5.7 : Vergleich der Einflußfunktionen 1. Ordnung für die Randbedingungen $T_w = \text{konst.}$ und $q_w = \text{konst.}$

Die kritische Reynolds-Zahl ist nun nicht mehr nur eine Funktion der Heizrate ε sondern scheinbar auch der Ortskoordinate x (s. Gleichung (5.15)). Dies ergibt sich aus der speziellen Behandlung der thermischen Grenzschichtgleichung, in der eine Bezugstemperatur $(T_w^* - T_\infty^*)_L x^e$ eingeführt worden war (s. Kapitel 5.1). Für die kritische Reynoldszahl ergibt sich im Fall $q_w = \text{konst.}$

$$\frac{Re_{krit}}{Re_{krit,0}} = 1 + \varepsilon x^{1/2} (K_\rho A_\rho + K_\eta A_\eta) + \mathcal{O}((\varepsilon x^{1/2})^2). \quad (5.16)$$

Dabei resultiert der Faktor $x^{1/2}$ aus der Wandtemperaturverteilung und ist daher nicht als x -Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl sondern vielmehr als Teil der Heizrate zu interpretieren, welche sich mit der Lauflänge ändert. Eine solche Heizrate läßt sich zu $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon x^{1/2}$ definieren.

In Abbildung 5.8 ist die asymptotische Lösung (5.16) ausgewertet worden und im Vergleich mit Messungen von Harrison et al. (1991) dargestellt. Harrison et al. haben den Transitionsbeginn einer Luftströmung über eine ebene Platte mit Hilfe einer auf Flüssigkristallen basierenden Meßtechnik vermessen. Aus der Bezugstemperatur von 286.15 K ergeben sich die K -Werte zu $K_\rho = -1$ und $K_\eta = 0.779$.

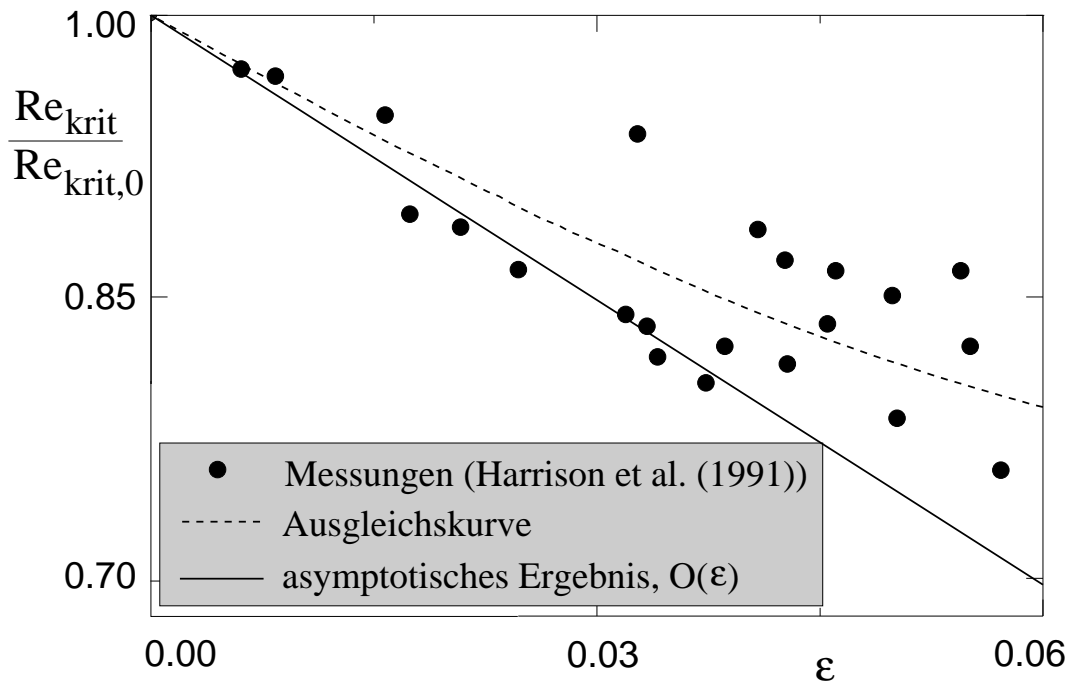


Abb. 5.8 : Vergleich der experimentellen Ergebnisse von Harrison et al. (1991) mit den asymptotischen Ergebnissen nach Gleichung (5.16) für $q_w = \text{konst.}$ ($T_\infty = 286.15K$, $Pr = 0.7$)

In Abbildung 5.8 ist die Heizrate ε mit der lokalen Temperaturdifferenz an der Stelle $x^* = L^*$ gebildet worden, so daß gilt: $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(L^*/L^*)^{1/2} = \varepsilon$. Der Zusammenhang zwischen der in der Arbeit von Harrison et al. benutzten Stanton-Zahl $St = q_w^*/(\rho_\infty^* U_\infty^* c_{p\infty}^* T_\infty^*)$ und ε ist durch $St = 0.406\varepsilon/Re$ gegeben. Gleichung (5.16) zeigt, wie zu erwarten war, gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Als letzten Punkt gilt es nun noch, die Effekte höherer Ordnung, d.h. im speziellen den Einfluß der spezifischen isobaren Wärmekapazität $c_p(T)$ sowie der Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ zu untersuchen. Die gesuchten Einflußfunktionen sind in Tabelle 5.1 für zwei Prandl-Zahlen dargestellt.

Durch Einsetzen der entsprechenden A_{ij} in die Gleichung (5.15) mit den entsprechenden K -Werten aus Tabelle 2.2 für Wasser und Luft können die funktionalen Zusammenhänge für die einzelnen Stoffwerteinflüsse auf die kritische Reynolds-Zahl gewonnen werden. In Abbildung 5.9 sind die Kurven für die einzelnen Effekte separat dargestellt.

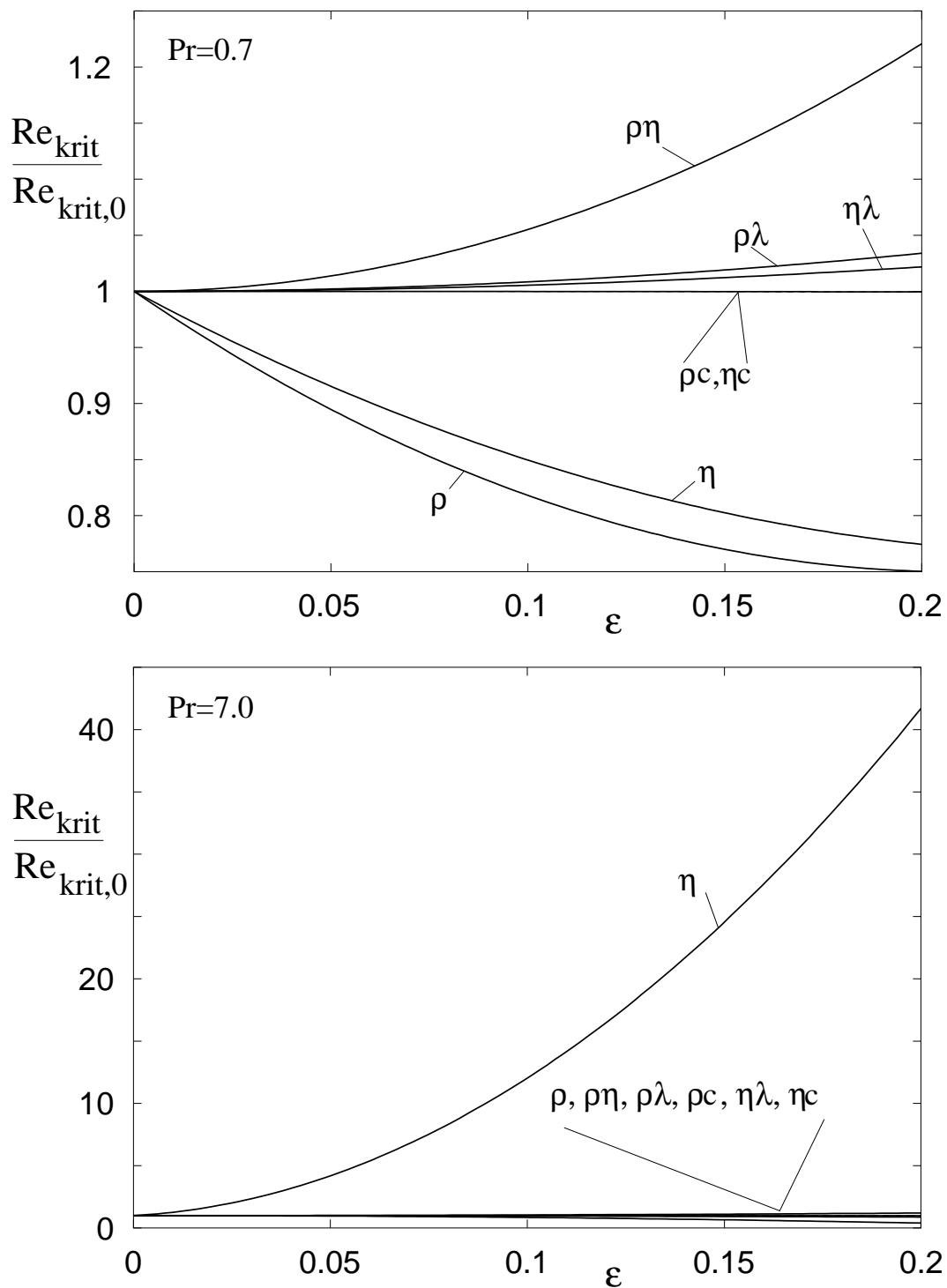


Abb. 5.9 : Vergleich der verschiedenen Stoffwerteinflüsse auf die kritische Reynolds-Zahl bei Gasen ($Pr = 0.7$) und bei Flüssigkeiten ($Pr = 7.0$) (K -Werte nach Tabelle 2.2, $T_w = \text{konst.}$)

Dabei stehen die Bezeichnungen $\rho, \rho\eta, \dots$ an den jeweiligen Kurven für die entsprechenden Einflüsse der einzelnen Ordnungen $\epsilon K_\rho A_\rho, \epsilon^2 K_{\rho\eta} A_{\rho\eta}, \dots$. Wie zu erwarten war, spielt bei Flüssigkeiten (Abbildung 5.9 unten) der Viskositäts-

fekt die entscheidende Rolle. Alle anderen Effekte sind hier zumindest für kleine Heizraten vernachlässigbar klein. Bei Gasen (Abbildung 5.9 oben) ist dies nicht der Fall. Ein noch größerer Effekt ist hier durch die Temperaturabhängigkeit der Dichte gegeben. Auch der kombinierte Effekt aus Dichte- und Viskositätsänderungen ist hier sehr stark. Eine geringere Rolle spielen die Effekte, welche durch Änderungen in der Wärmeleitfähigkeit bzw. der isobaren spezifischen Wärmekapazität zustandekommen.

Tabelle 5.1 : *Einflußfunktionen A_{ij} nach der kombinierten Methode (Gleichungen (5.13), (5.14); $T_w = \text{konst.}$)*

	$Pr = 0.7$	$Pr = 7.0$
A_ρ	2.39	4.62
A_η	-2.42	-4.78
$A_{\rho\rho}$	1.85	16.22
$A_{\eta\eta}$	5.20	20.81
$A_{\rho 2}$	1.93	1.85
$A_{\eta 2}$	-1.80	-1.63
$A_{\rho\eta}$	-7.12	-37.10
$A_{\rho\lambda}$	-0.95	0.49
$A_{\rho c}$	0.21	-0.29
$A_{\eta\lambda}$	0.79	-0.87
$A_{\eta c}$	-0.22	0.13

5.4 Nichtlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte mit Wärmeübergang

Die nichtlokale nichtparallele Stabilitätsanalyse der Grenzschicht an der ebenen Platte basiert auf den vollständigen parabolischen Stabilitätsgleichungen (2.12)–(2.14) (s. Kapitel 2.2.2). Da die Berechnungen der vollständigen Gleichungen sehr aufwendig sind und daher eine Parameterstudie sehr viel Zeit in Anspruch nimmt, ist das Ziel dieses Abschnitts, einen Vergleich zwischen den

Ergebnissen der OSE-Gleichungen und denen der PSE-Gleichungen anzustellen.

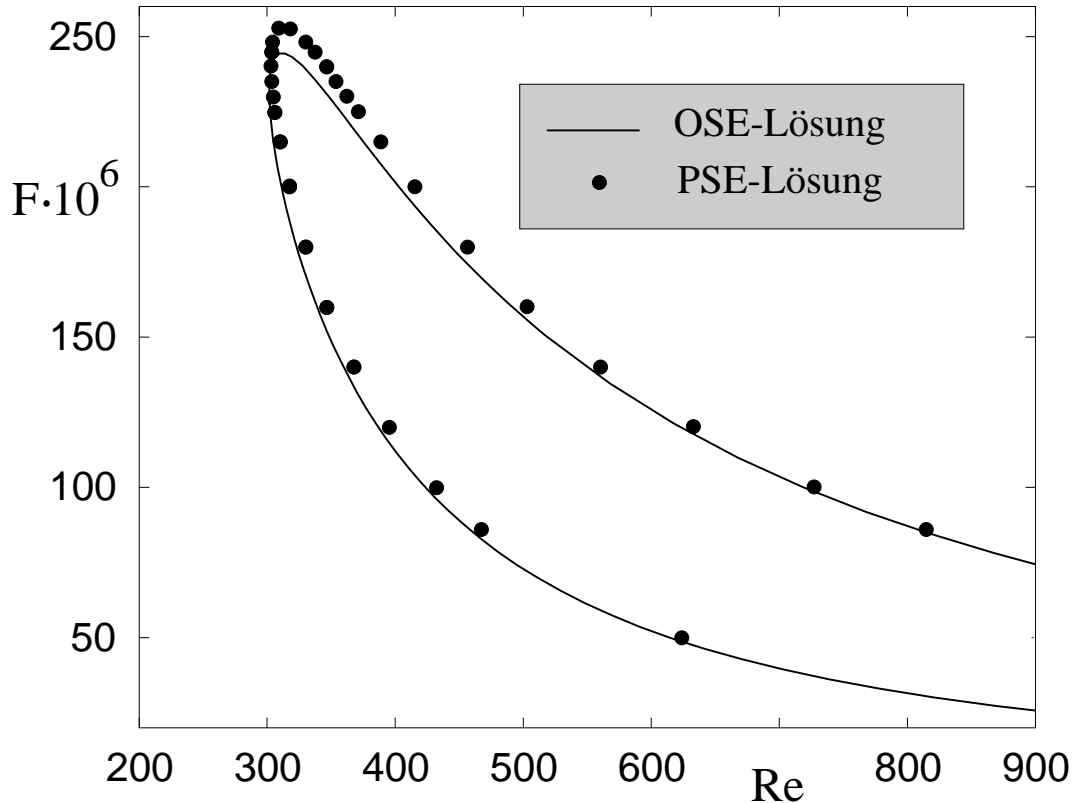


Abb. 5.10 : Vergleich der Indifferenzkurven nach nichtlokaler nichtparalleler (PSE-Gleichungen) und lokaler paralleler Stabilitätsanalyse (Orr-Sommerfeld-Gleichung) für konstante Stoffwerte

Dieser soll Aufschluß darüber geben, inwiefern die Effekte variabler Stoffwerte von Effekten der Nichtparallelität der Grundströmung beeinflußt werden. Untersuchungen von Bertolotti (1991) und auch von Govindarajan und Narashima (1995) haben gezeigt, daß der Einfluß der Nichtparallelität auf die Stabilität der Plattengrenzschicht bei konstanten Stoffwerten nur sehr gering ist und im wesentlichen im Bereich hoher Frequenzen zu beobachten ist (Anfachungsrate nach Gl. (2.16)). Eigene Berechnungen der Indifferenzkurven nach den Gleichungen (2.12)–(2.14) zeigten ebenfalls dieses Verhalten und sind in Abbildung 5.10 im Vergleich zu den Lösungen der Orr-Sommerfeld-Gleichungen dargestellt.

Die Bezugsgrößen für die PSE-Gleichungen sind entsprechend der Tabelle 2.1 zu wählen, wobei $L_B^* = \delta_0^*(x_0^*)$ ist. Damit geht man bei der Lösung dieser

Gleichungen von einer festen Stelle $\hat{x}_0 = x_0^*/\delta_0^*(x_0^*)$ aus, an der die Anfangs- und Randbedingungen gegeben sein müssen. Als Anfangsbedingungen dienen die in Kapitel 2.2.3 beschriebenen lokalen Lösungen. Die Grundströmung aus Kapitel 5.2 muß entsprechend des nun verwendeten Koordinatensystems (\hat{y}, \hat{x}) transformiert werden. Aus Gleichung (5.2) ergibt sich

$$\Psi(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}_0} \right)^{1/2} f(x, \eta_s), \quad \text{mit } \hat{x}_0 = Re_0 = \frac{U_\infty^* \delta_0^*}{\nu_\infty^*}. \quad (5.17)$$

Daraus kann die Grundströmung zu

$$-\frac{\partial \Psi(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} = \bar{v} \bar{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{x}\hat{x}_0}} \left[\hat{y} \left(\frac{\hat{x}_0}{\hat{x}} \right)^{1/2} f'(x, \eta_s) - f(x, \eta_s) \right] \quad (5.18)$$

und

$$\frac{\partial \Psi(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} = \bar{u} \bar{\rho} = f'(x, \eta_s) \quad (5.19)$$

berechnet werden. Für die Koordinate quer zur Strömungsrichtung gilt $\hat{y} = y^*/\delta_0^* = \eta_s(\hat{x}/\hat{x}_0)^{1/2}$. In den folgenden Abschnitten werden häufig Ergebnisse der lokalen parallelen Analyse als Vergleich angeführt. Dabei gilt für den komplexen Parameter $\hat{\alpha}$ die Umrechnung

$$\underline{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha} \frac{\delta_0^*(x_0^*)}{\delta^*(x^*)} = \hat{\alpha} \frac{Re_0}{Re}. \quad (5.20)$$

Zum Vergleich zwischen lokaler paralleler und nichtlokaler nichtparalleler Theorie sind in Abbildung 5.11 zunächst die Amplitudenverhältnisse

$$\ln(A/A_0) = -2 \int_{Re_0}^{Re} \alpha_i d Re \quad (5.21)$$

aufgetragen.

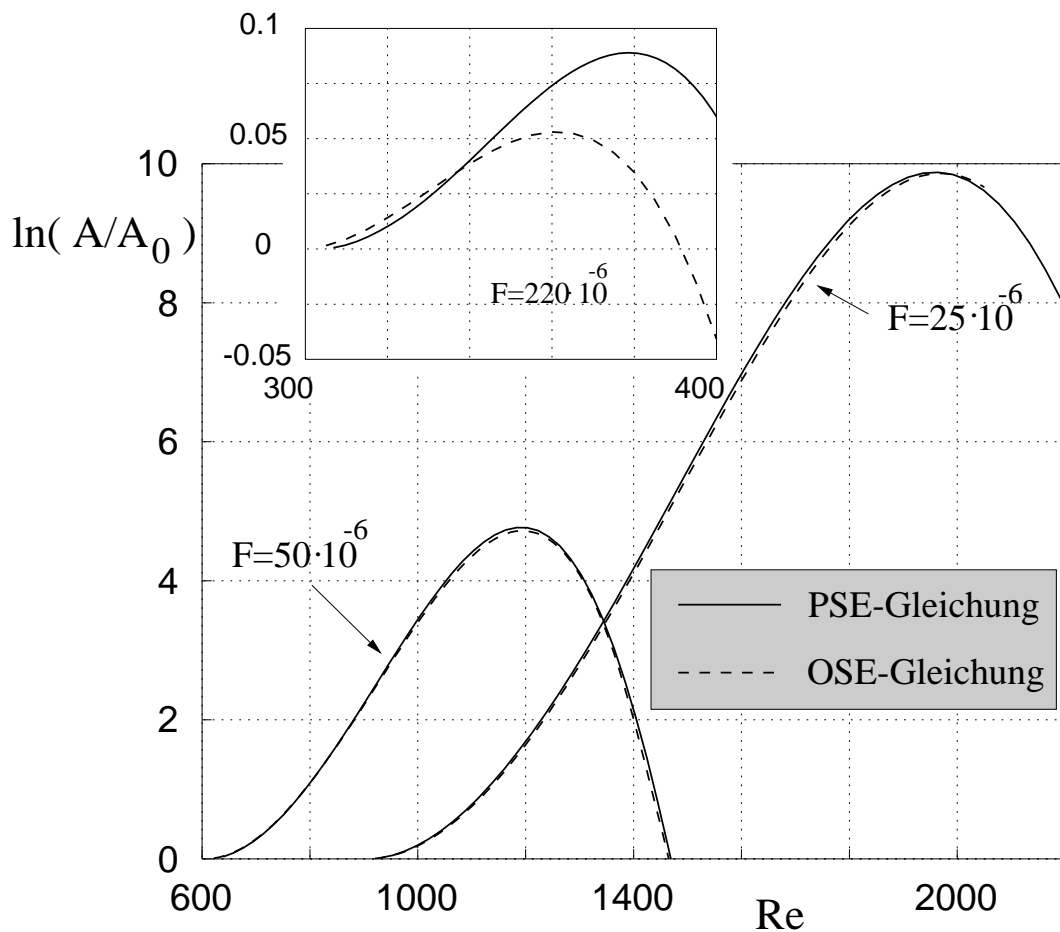


Abb. 5.11 : Amplitudenverhältnis $\ln(A/A_0)$; Vergleich zwischen nichtlokaler nichtparalleler Theorie (PSE-Gleichungen) und lokaler paralleler Theorie (Orr-Sommerfeld-Gleichung) für konstante Stoffwerte

Für kleine Frequenzen ergibt sich bei einer nichtlokalen nichtparallelen Analyse kaum ein Unterschied zur OSE-Analyse. Die Effekte der Nichtparallelität machen sich erst bei hohen Frequenzen bemerkbar. Da diese Frequenzen jedoch nur geringer Anfachung unterliegen (Abbildung 5.11), sind sie für die Transitionsvorhersage unbedeutend. Die Stabilitätseigenschaften bzw. die kritische Reynoldszahl wird dahingegen gerade im Bereich hoher Frequenzen bestimmt. Es hat sich aber gezeigt, daß die PSE-Analyse keine wesentlichen Veränderungen für die kritische Reynolds-Zahl zu Folge hat (s. Abbildung 5.10). Auch der Einfluß variabler Stoffwerte, so stellte sich bei einigen Berechnungen heraus, wird hier nicht wesentlich anders sein als bei einer Orr-Sommerfeld-Analyse des Problems. Die Einflußfunktionen A_ρ und A_η wichen nur ca. 2–2.5 Prozent von den Ergebnissen der lokalen parallelen Analyse ab (Testrechnung für die

Frequenz $F = 240 \cdot 10^{-6}$).

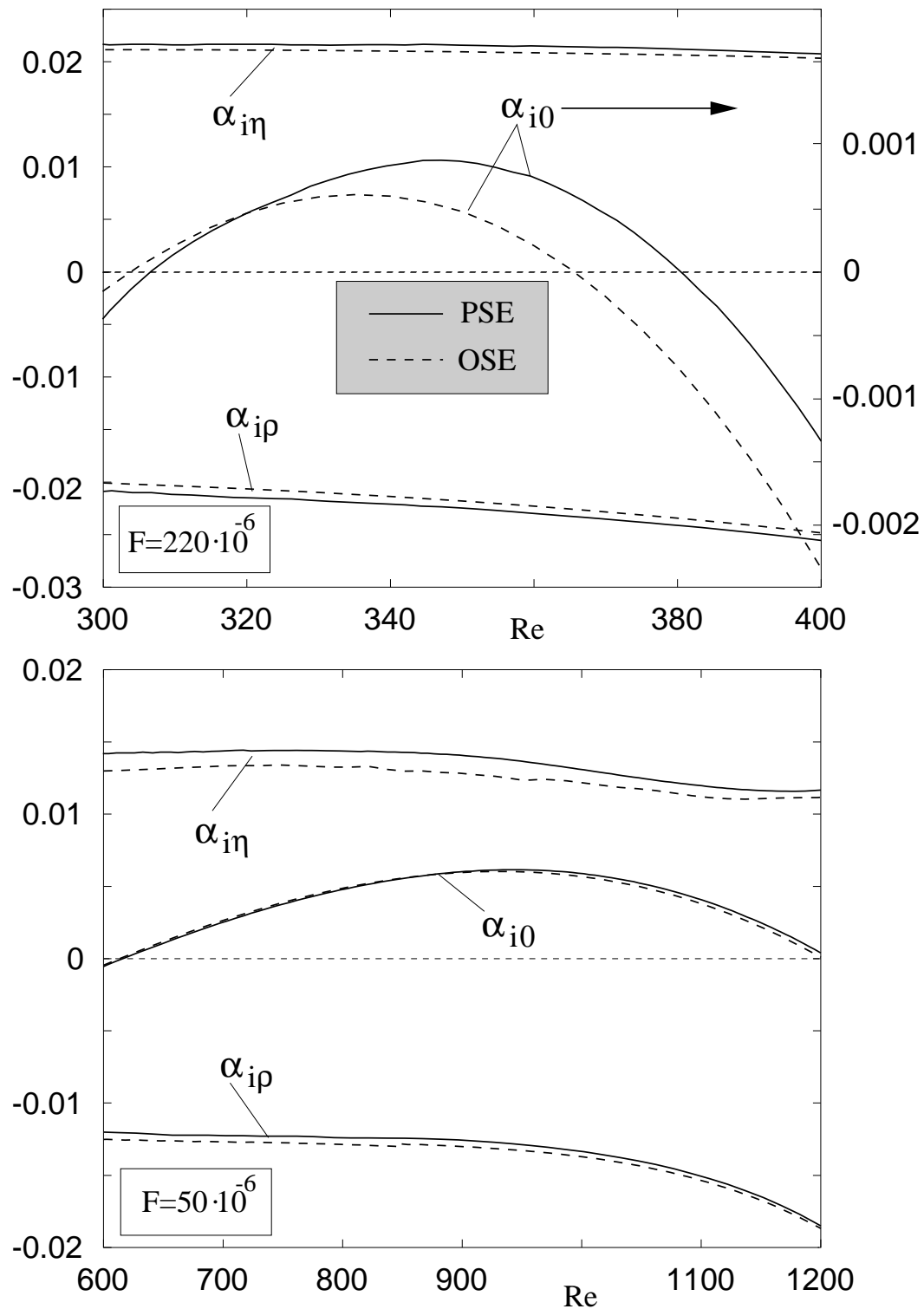


Abb. 5.12 : Anfachungsraten 0. und 1. Ordnung. Vergleich zwischen nichtlokaler nichtparalleler Theorie (PSE-Gleichungen) und lokaler paralleler Theorie (Orr-Sommerfeld-Gleichung) ($Pr = 0.7$, $T_w = \text{konst.}$)

In Abbildung 5.12 sind Anfachungsraten 0. und 1.Ordnung (Einflüsse der Stoffwerte ρ und η) für ein Fluid mit der Prandtl-Zahl $Pr = 0.7$ und zwei verschiedene Frequenzen gezeigt. Auch hier ist kein wesentlicher Unterschied in den Anfachungsraten 1. Ordnung $\alpha_{i\rho}$, $\alpha_{i\eta}$ feststellbar. Auch für hohe Frequenzen, bei denen eine relativ große Abweichung in den Anfachungsraten 0. Ordnung vorliegt (s. Abbildung 5.12 oben) gibt es kaum Differenzen zwischen den Lösungen der PSE-Gleichungen und denen der Orr-Sommerfeld-Gleichungen. Die Abweichungen in der Anfachungsrate α_{i0} für die Frequenz $F = 220 \cdot 10^{-6}$ wirken sich deutlich auf das Amplitudenverhältniss $\ln(A/A_0)$ aus, wie in Abbildung 5.11 zu sehen ist.

5.5 Zusammenfassung

Es ist gezeigt worden, wie ein Temperaturfeld über die Effekte variabler Stoffwerte die Stabilität von Grenzschichten bei erzwungener Konvektion beeinflussen kann. Für die Grenzschichtströmung mit Druckgradient ergab sich, daß die verschiedenen Stoffwerteffekte nicht als überlagerte Effekte zu dem vorhandenen Einfluß des Druckgradienten auf die Stabilität hinzuaddiert werden können. Es scheint eher so zu sein, daß der Einfluß variabler Stoffwerte durch kleine Druckgradienten verstärkt wird, und dieser Effekt sich dann bei ansteigendem ($\partial p/\partial x > 0$) bzw. abfallendem ($\partial p/\partial x < 0$) Druckgradienten umkehrt. Dieses Verhalten hängt zusätzlich noch von der Prandtl-Zahl ab.

Die Effekte höherer Ordnung sowie der Einfluß der Randbedingungen ist an der Blasius'schen Grenzschicht untersucht worden. Es stellte sich heraus, daß die wesentlichen Effekte für den untersuchten Prandtl-Zahlenbereich von der Temperaturabhängigkeit der Dichte und der Viskosität herrühren, und die Einflußfunktionen in diesem Bereich die gleiche Größenordnung haben (s. Tabelle 5.1). Die realen Effekte sind zusätzlich noch von der Beschaffenheit des untersuchten Fluides bzw. dessen Stoffeigenschaften abhängig (s. Abbildung 5.9), so daß die Stabilitätseigenschaften einer Strömung für verschiedene Fluide sehr

unterschiedlich durch ein Temperaturfeld beeinflußt werden können.

Die Analyse des Einflusses anderer Randbedingungen ist auf den Vergleich zwischen $q_w = \text{konst.}$ und $T_w = \text{konst.}$ beschränkt worden, da in diesen Fällen die Grundströmung selbstähnlichen oder zumindest quasiselbstähnlichen Charakter hat. Es ergab sich nur ein unwesentlicher Unterschied in den Einflußfunktionen 1. Ordnung.

Der Vergleich zwischen der lokalen parallelen Stabilitätsanalyse mit Ergebnissen aus Berechnungen basierend auf den PSE-Gleichungen zeigte nur kleine Unterschiede. Der Vergleich in Form der Anfachungsraten 1. Ordnung deutete aber daraufhin, daß Abweichungen im gesamten Frequenzbereich gleichmäßig klein bei wenigen Prozenten liegen.

6 Thermische Rezeptivität: Wie entstehen Temperaturschwankungen ?

6.1 Vorbemerkungen

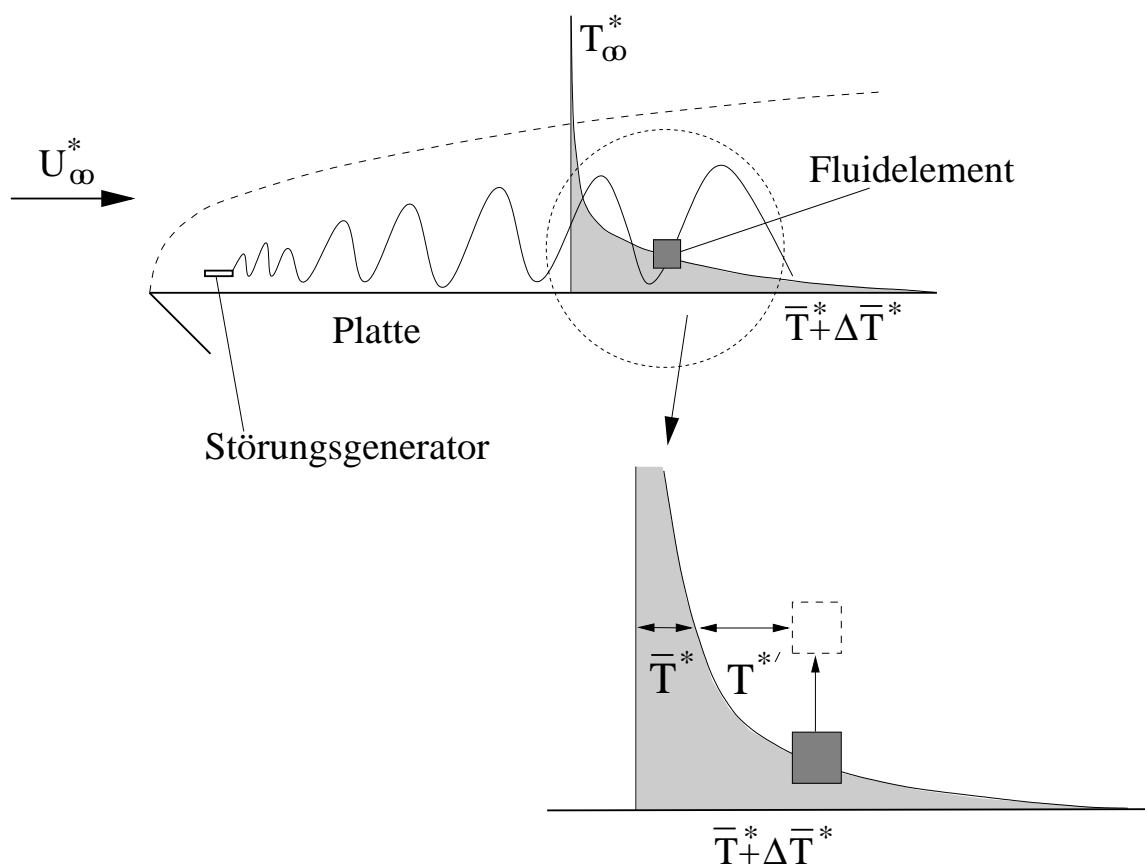


Abb. 6.1 : Schematische Darstellung zur Entstehung von Temperaturschwankungen in einer Grenzschichtströmung

Die Wirkung eines Temperaturfeldes auf die Stabilität einer Strömung liegt in der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte begründet. Dabei kann es zwei unterschiedliche Effekte geben. Der erste Effekt resultiert aus der mittleren Temperaturverteilung in der Strömung, so daß alle Stoffwerte als Funktion

der mittleren Temperatur \bar{T} angesehen werden können. Ein weiterer Effekt tritt durch die Ausbildung eines Temperaturschwankungsfeldes auf, welches aus der Schwankungsbewegung der Fluidteilchen resultiert. Einem Fluidelement widerfährt nach Abbildung 6.1 folgendes: Das Fluidelement wird z.B. durch die Schwankungsbewegung aus einem wandnahen Bereich erhöhter Temperatur, unter Mitnahme derselben, in einen Bereich geringerer Temperatur transportiert. Das Fluidteilchen hat dann an dieser Stelle im Vergleich zur mittleren Temperatur \bar{T} eine um T' höhere Temperatur. Dieser Differenzbetrag kann als Temperaturschwankung interpretiert werden. Die beteiligten Stoffwerte sind dann nicht mehr nur Funktionen der mittleren Temperatur \bar{T} sondern auch der Schwankungs- oder Störtemperatur T' .

Der Einfluß der Temperaturschwankungen ist in der Vergangenheit sehr unterschiedlich bewertet worden. Während einige Autoren diesen Effekt vernachlässigten (Wazzan et al. (1972), Potter und Graber (1970)) , ist er bei anderen Autoren ohne Einschränkung in die Analyse mit einbezogen worden. Unabhängig von der Größe des Effektes ist in der linearen Stabilitätstheorie immer die Annahme gemacht worden, daß die Form der Temperaturschwankungen exakt der der Geschwindigkeitsschwankungen entspricht (engl.: **shape assumption**). Diese Annahme ist sinnvoll, solange die Temperaturschwankungen passiven Charakter haben, d.h. sich aus den Geschwindigkeitsschwankungen nach Abbildung 6.1 entwickeln. Dieser Entwicklungsprozeß ist jedoch ein Prozeß mit diffusivem Charakter und wird durch die thermische Energiegleichung (2.14) beschrieben. Es ist daher anzunehmen, daß die Temperaturschwankungen zwar nach einer gewissen Zeit oder Distanz die Form der Geschwindigkeitsschwankungen annehmen, jedoch ist nicht klar, wie lange die Entwicklung dauert, und wie sich diese Entwicklung auf das Stabilitätsverhalten der Strömung auswirkt. Herwig und You (1996) untersuchten diesen Effekt in der Poiseuille Strömung, jedoch basierte die Analyse auf einem zeitlichen Anfangsrandwertproblem. Sie bezeichneten die Entstehung von Temperaturschwankungen in Analogie zur Entstehung von Geschwindigkeitsschwankungen in einer Grenzschicht als **ther-**

mische Rezeptivität.

In der vorliegenden Arbeit werden die oben genannten Effekte mittels der vollständigen PSE-Gleichungen untersucht. Das Anfangsrandwertproblem ist daher ein räumliches und berücksichtigt zudem noch Effekte der Nichtparallelität.

6.2 Einfluß der Temperaturschwankungen auf die Stabilität der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte

Zunächst soll die Größe des Effektes der Temperaturschwankungen auf das Stabilitätsverhalten der Grenzschicht an der ebenen Platte untersucht werden.

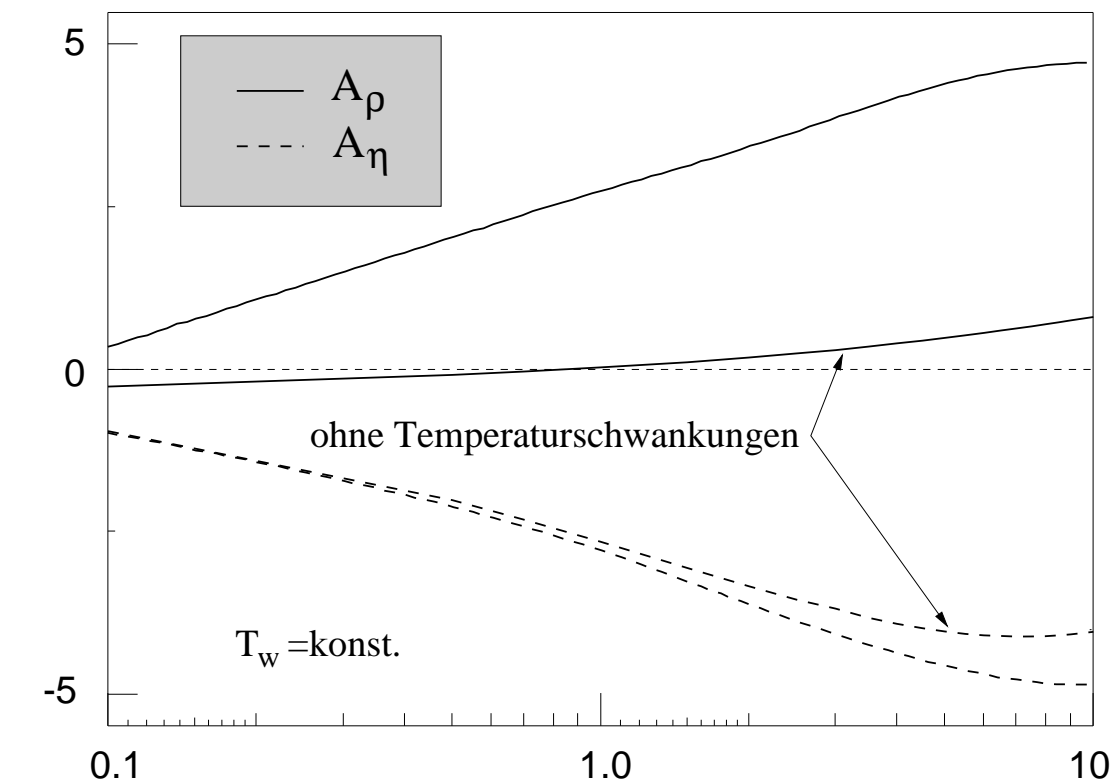


Abb. 6.2 : Vergleich der Einflußfunktionen A_ρ und A_η für die Blasius'sche Grenzschicht mit und ohne Temperaturschwankungen

In Kapitel 5 hatte sich schon herausgestellt, daß der Unterschied zwischen einer Behandlung dieser Problematik mittels PSE-Gleichungen und OSE-Gleichungen vernachlässigbar gering ist. Daher wird zur Bestimmung der

Größenordnung des Effektes auf die lokale parallele Stabilitätsanalyse zurückgegriffen. Ergebnisse für die ebene Platte bei $T_w = \text{konst.}$ sind in Kapitel 5.3.1 gezeigt worden. Hier sollen nun noch einmal die Einflußfunktionen 1. Ordnung (A_ρ, A_η) unter Vernachlässigung der Temperaturschwankungen bestimmt werden. Ein Vergleich mit den Einflußfunktionen aus Kapitel 5.3.1 ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Temperaturschwankungen im Dichteeffekt A_ρ die entscheidende Rolle spielt, während Temperaturschwankungen den Viskositätseffekt A_η nur wenig beeinflussen. Für $Pr \rightarrow 0$ nimmt der Einfluß der Temperaturschwankungen in den Funktionen A_ρ und A_η ab, und es ist zu erwarten, daß der Effekt für den Grenzübergang $Pr = 0$ identisch null ist. Dies folgt aus der Struktur der thermischen Energiegleichung (2.14), welche dann bei endlichen Reynolds-Zahlen als $\nabla^2 \hat{\Theta} = 0$ geschrieben werden kann. Diese Gleichung hat im Fall homogener Randbedingungen, wie sie für die Störtemperatur verlangt werden, nur die triviale Lösung $\hat{T} = 0$.

Der Dichteeffekt rührt bei Prandtl-Zahlen um 1 fast vollständig von den Temperaturschwankungen her. Da in diesem Prandtl-Zahlenbereich auch der absolute Wert von Viskositätseffekt und Dichteeffekt ca. gleich groß ist (s. Abbildung 5.9 oben, Dichteeffekt nicht vernachlässigbar), soll im nächsten Abschnitt geprüft werden, inwiefern es realistisch ist, den Temperaturschwankungseinfluß als konstant bezüglich einer räumlichen Stabilitätsanalyse zu betrachten. In dem Fall müßte die Entwicklung der Temperaturschwankungen bis zum kritischen Punkt (kritische Reynolds-Zahl) abgeschlossen sein.

6.3 Entwicklung von Temperaturschwankungen in der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte

Da die thermische Energiegleichung für die Schwankungsbewegungen (2.14) diffusiven Charakter besitzt, kann angenommen werden, daß die Entwicklung der Temperaturschwankungen bis zur entgültigen Form über eine gewisse Distanz vonstattengeht. Dies wird sicherlich nicht für jede Strömung bzw. jedes Fluid

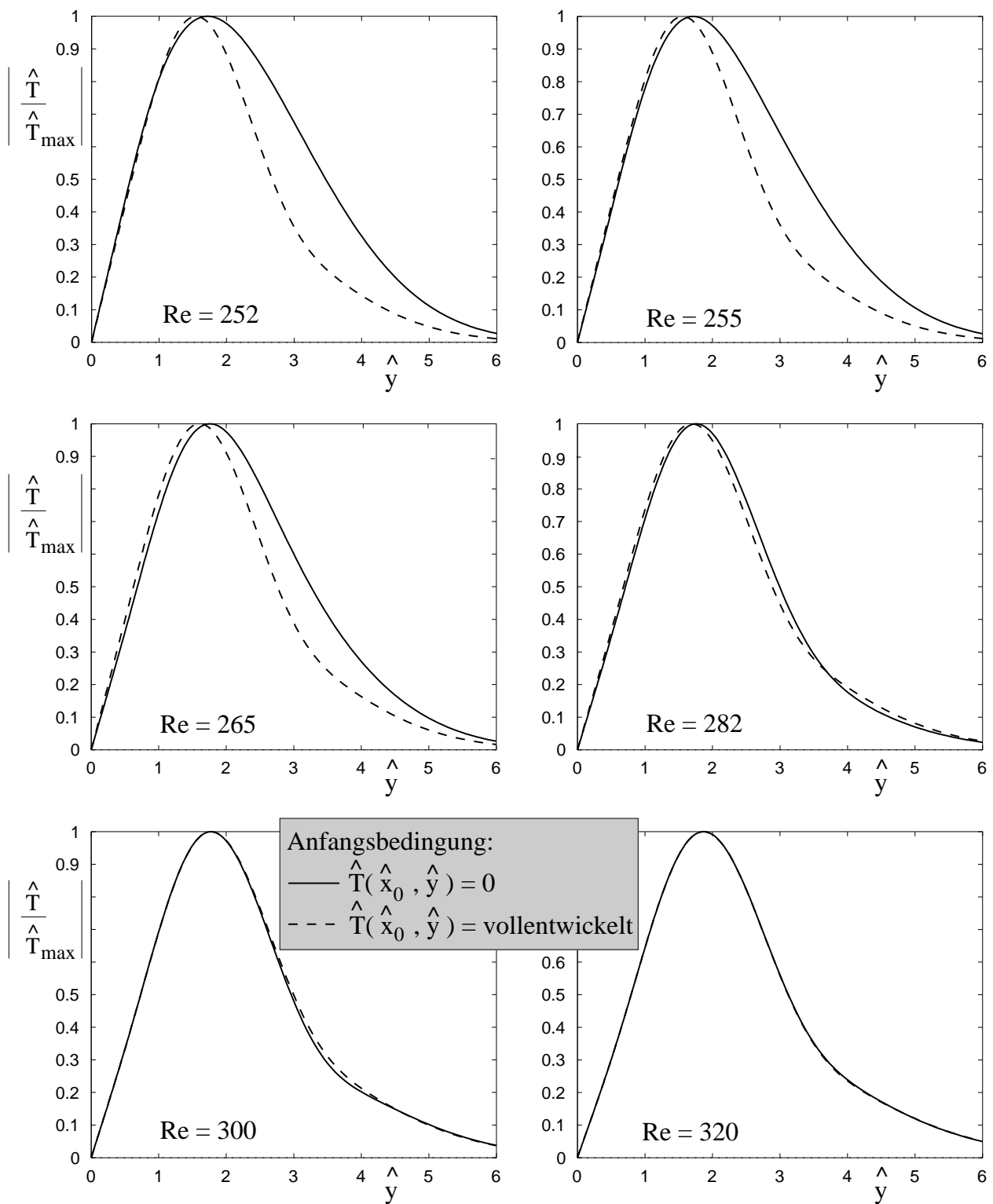


Abb. 6.3 : Entwicklung der Amplitudenfunktionen der Temperaturschwankungen in der Blasius'schen Grenzschicht ($Pr = 0.7$, $F = 240 \cdot 10^{-6}$)

gleich sein, da der Einfluß der Diffusionsterme durch die Parameterkombination $Pr Re = Pe$ (Peclet-Zahl) in seiner Größe bestimmt wird. Herwig und You

(1997) zeigten, daß mit einer Reduzierung der Peclet-Zahl um den Faktor 10 eine Verringerung der Anpassungszeit für die Temperaturschwankungen um ca. 20% einhergeht. Als Anpassungszeit wird die Zeitspanne definiert, in der sich die Temperaturschwankung nach Einbringen einer Geschwindigkeitsschwankung \hat{u} vollständig entwickelt, d.h. sich an die durch die "shape assumption" vorgegebene Form angepaßt hat (zeitliche Analyse). Um eine entsprechende Berechnung für die räumliche Entwicklung der Temperaturschwankungen durchführen zu können, wurden die vollständigen PSE-Gleichungen mit der Anfangsbedingung $\hat{\Theta}(\hat{x}_0, \hat{y}) = 0$ gelöst. In diesem Fall kann dann analog zum zeitlichen Problem von einer Anpassungslänge gesprochen werden. Dabei entwickelt sich jedoch die Amplitudenfunktion der Temperaturschwankung hier nicht bis hin zu einer Funktion $\hat{\Theta}(\hat{y})$, sondern paßt sich langsam an die Form der Amplitudenfunktion an, die ein vollentwickeltes Temperaturschwankungsfeld an der jeweiligen Stelle \hat{x} besitzt.

Abbildung 6.3 zeigt die Entwicklungsstadien, welche die Amplitudenfunktion der Störtemperatur durchläuft, für ein Fluid mit der Prandtl-Zahl $Pr = 0.7$. Die gezeigten Amplitudenfunktionen der Störtemperaturen sind für eine Frequenz von $F = 240 \cdot 10^{-6}$ berechnet worden. Das Temperaturfeld wurde bei $\hat{x} = 312.5$ "eingeschaltet" ($Re = 250$), d.h. bis zu dieser Stelle galt $\hat{\Theta}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Erst ab dort konnte eine Entwicklung der Temperaturschwankungen erfolgen. Das Feld der Geschwindigkeitsschwankungen ist dabei als vollentwickelt angenommen worden. Es zeigt sich, daß die durch die "shape assumption" vorgegebene Form schon nach einer Lauflänge, die etwa der 3.8-fachen Wellenlänge entspricht, erreicht ist. Damit davon ausgegangen werden kann, daß diese Ergebnisse nicht eine Folge numerischer Ungenauigkeiten sind, wurden mehrere Rechnungen mit verschiedener Auflösung des Rechengebietes gemacht. Wie sich das transiente Verhalten der Temperaturschwankungen auf die Stabilität der Strömung auswirkt, soll nun anhand der Anfachungsrate $\underline{\alpha}_i$ gezeigt werden. Sofern nur eine lineare Theorie bezüglich des Einflusses der Stoffwerte ($\mathcal{O}(\varepsilon)$) verfolgt wird,

kann die Anfachungsrate auch als

$$\underline{\alpha}_i = \underline{\alpha}_{i0} + \varepsilon K_\eta (\underline{\alpha}_{i\eta 1} + \underline{\alpha}_{i\eta 2}) + \varepsilon K_\rho (\underline{\alpha}_{i\rho 1} + \underline{\alpha}_{i\rho 2}) \quad (6.1)$$

geschrieben werden. Dabei sind die Einflußfunktionen $\underline{\alpha}_{i\eta}$ und $\underline{\alpha}_{i\rho}$ noch einmal in einen 1. Anteil (Index 1), der von dem Einfluß des mittleren Temperaturfeldes herrührt, und in einen 2. Anteil (Index 2), der vom Einfluß des Temperaturschwankungsfeldes herrührt, unterteilt. Das transiente Verhalten der Störtemperatur wirkt sich nur auf den 2. Anteil der Einflußfunktionen aus. In Abbildung 6.4 ist dieser Anteil für das in Abbildung 6.3 gezeigte Verhalten der Störtemperatur, entdimensioniert mit der lokalen Grenzschichtdicke $\delta^*(x^*)$, aufgetragen ($\alpha_{i\rho 2}$, $\alpha_{i\eta 2}$). Das Verhalten der Einflußfunktionen $\alpha_{i\eta 2}$ und $\alpha_{i\rho 2}$ spiegelt die Entwicklung der Temperaturschwankungen wieder. Es zeigt sich, daß der Absolutwert von $\alpha_{i\eta 2}$ und $\alpha_{i\rho 2}$ schon nach einer geringeren Distanz, im Vergleich zum Anpassungsvorgang der Störtemperatur, den entgültigen Wert annähernd erreicht hat. Der Viskositätseffekt ist nach etwa 2 Wellenlängen voll ausgeprägt. Im Falle der gegenüber dem Viskositätseinfluß um etwa das zwanzigfache größeren Einflußfunktion $\alpha_{i\rho 2}$ ist der Endwert schon nach etwa 0.5 Wellenlängen erreicht ($Re \sim 260$). Danach stellt sich ein Einschwingverhalten der Einflußfunktionen ein, wobei keine großen Abweichungen mehr auftreten.

Die in Abbildung 6.4 gezeigten Ergebnisse sind unter Verwendung zentraler Differenzen für die x -Ableitungen in den PSE-Gleichungen berechnet worden. Es kann daher sein, daß hier zusätzlich zum physikalischen transienten Verhalten der Temperaturschwankungen auch ein numerisches, also künstliches transientes Verhalten auftritt (s. Anhang B). In dem Fall können die Ergebnisse so interpretiert werden, daß der Einfluß der Temperaturschwankung schon eher seine Wirkung entfaltet als in Abbildung 6.4 gezeigt, da das transiente Verhalten des Lösungsalgorithmus' in der Realität nicht vorhanden ist. Rechnungen mit einer "backward Euler" Diskretisierung der Gleichungen haben ergeben, daß lediglich das Nachschwingen der Lösungen für $\alpha_{i\eta 2}$ und $\alpha_{i\rho 2}$ etwas schwächer ist. Grundsätzlich ist das Verhalten jedoch mit dem gezeigten identisch.

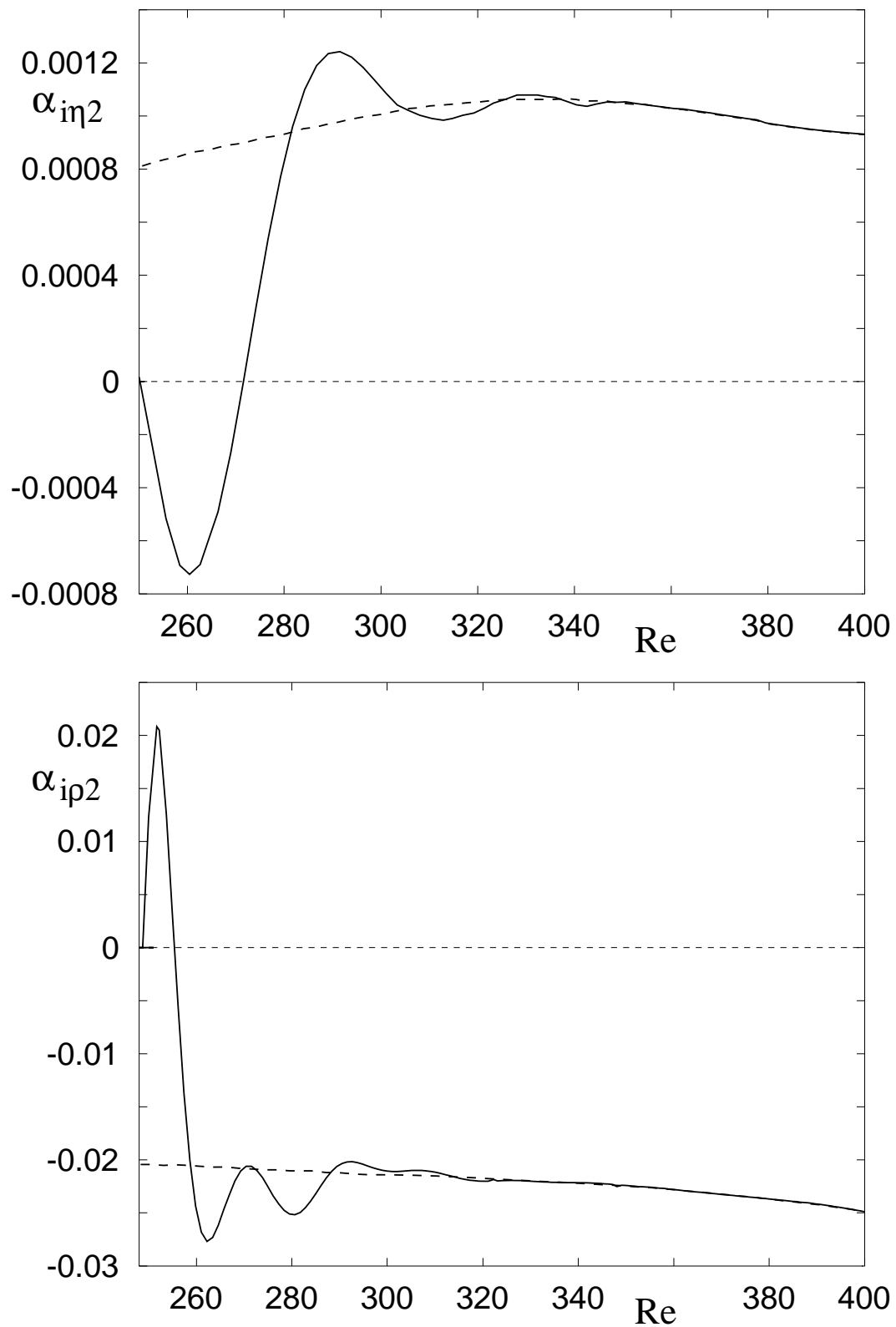


Abb. 6.4 : *Entwicklung der Anfachungsraten $\alpha_{i\rho 2}$ und $\alpha_{i\eta 2}$ in Strömungsrichtung (Blasius'sche Grenzschicht, $Pr = 0.7$, $F = 240 \cdot 10^{-6}$)*

6.4 Zusammenfassung

Mit Hilfe der lokalen parallelen Stabilitätsanalyse ist festgestellt worden, in welchen Fällen die Wirkung von Temperaturschwankungen auf die Stabilität von Grenzschichtströmungen berücksichtigt werden muß. Obwohl davon ausgegangen werden kann, daß diese für kleine Prandtl-Zahlen $Pr \rightarrow 0$ abnimmt (s. Abbildung 6.2), kann der Effekt, wie im Falle der Einflußfunktion A_ρ , nahezu den gesamten Anteil des entsprechenden Stoffwerteinflusses ausmachen. Für diese Fälle ist es dann aber entscheidend, ob der Effekt schon unmittelbar nach "Einschalten" eines Temperaturfeldes vollständig vorhanden ist. Diese Annahme liegt der erweiterten Orr-Sommerfeld-Gleichung für variable Stoffwerte zugrunde. Da sich ergeben hat, daß die Anpassungslänge relativ kurz ist, kann zumindest bei Untersuchungen beheizter Grenzschichten mit einer Heizlänge, welche größer ist als die Anpassungslänge, bedenkenlos mit der erweiterten Orr-Sommerfeld-Gleichung gerechnet werden. Im Einzelnen muß jedoch vorher genau untersucht werden, ob eine OSE-Analyse die Einflüsse von z.B. kurzen Heizstreifen (in Strömungsrichtung) auf die Stabilität von Strömungen exakt genug wiedergeben kann. Auch muß eine Untersuchung für andere Frequenzen und Prandtl-Zahlen gemacht werden, da nicht davon ausgegangen werden kann, daß das Rezeptivitätsverhalten einer Strömung bezüglich der Temperaturschwankungen unabhängig von diesen Parametern ist.

Im übrigen decken sich die hier gefundenen Ergebnisse in etwa mit den Berechnungen von Herwig und You (1997), die für den Effekt variabler Viskosität $\alpha_{i\eta 2}$ bei ihrer zeitlichen Analyse eine Anpassungsdauer berechneten, die etwa der vierfachen Wellenlänge entspricht (s.o.). Die Berechnungen sind dort für eine Kanalströmung mit konstantem Wandwärmestrom $q_w^* = \text{konst.}$ durchgeführt worden.

7 Gesamtzusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit sind Effekte temperaturabhängiger Stoffwerte, welche Folge eines dem Strömungsfeld überlagerten Temperaturfeldes sind, für das Stabilitätsverhalten verschiedener Strömungstypen untersucht worden. Die Untersuchungen basierten auf der linearen primären Stabilitätstheorie. Als mathematische Modelle wurden zum einen die PSE-Gleichungen sowie die Gleichungen zur Bestimmung lokaler Lösungen (s. Bertolotti (1991)), und zum anderen die erweiterten Orr–Sommerfeld-Gleichungen, jeweils für variable Stoffwerte, hergeleitet. Letztere wurden für eine Analyse sowohl der zeitlichen (Kapitel 3) als auch der räumlichen Entwicklung von Störgößen (Kapitel 4, 5, 6) eingesetzt.

Da die PSE-Gleichungen bezüglich der erweiterten Orr–Sommerfeld-Gleichungen eine Theorie höherer Ordnung darstellen (Hinzunahme der Nichtparallelitätseffekte), war es möglich, den Effekt variabler Stoffwerte in Kombination mit dem Effekt der Nichtparallelität der Grundströmung zu bestimmen.

Die Einflüsse variabler Stoffwerte sind mittels systematischer asymptotischer Entwicklungen der mathematischen Modelle bezüglich eines Heizparameters ε untersucht worden. Diese basieren auf einer Taylorreihenentwicklung der Stoffwerte um eine Bezugstemperatur T_B^* . Eine vollständige Entwicklung der Stabilitätsgleichungen für den Fall variabler Viskosität ist am Beispiel der horizontalen beheizten Fluidschicht in Kapitel 3 durchgeführt worden. Es ist häufig mit Nachteilen verbunden, diese Entwicklungen schon bei den mathematischen Modellen durchzuführen, da mitunter sehr aufwendige Herleitungen gemacht werden müssen, die entsprechend fehleranfällig sind. Eine asymptotische Entwicklung der Ergebnisse in Form der kritischen Kennzahlen verlangt jedoch lediglich die Berechnung sogenannter Einflußfunktionen, welche auch mit Hilfe

einer kombinierten Methode aus den nichtentwickelten Gleichungen bestimmt werden können. Da man mit diesem Verfahren den großen Aufwand, der bei der Entwicklung der Stabilitätsgleichungen entstehen würde, umgehen kann, ist es in den meisten Fällen zur Anwendung gekommen. Lediglich in einigen wenigen Fällen kann eine konkrete Entwicklung helfen, Gleichungen zu vereinfachen. So ist z.B. die Grenzschichtströmung über einer beheizten ebenen Platte bei konstantem Wandwärmestrom und variablen Stoffwerten keine selbstähnliche Strömung, und folglich sind die beschreibenden Gleichungen partielle Differentialgleichungen. Mit einem speziellen Ansatz führt die Entwicklung der Gleichungen jedoch in diesem Fall zur Reduzierung des Problems auf gewöhnliche Differentialgleichungen (Kapitel 4, 5).

Ausgehend von den Entwicklungen der Stoffwerte als Funktionen der Temperatur konnten für die kritischen Parameter, welche das Einsetzen der Instabilität in den verschiedenen Strömungen beschreiben, asymptotische Reihen angegeben werden, die als allgemeingültige Zusammenhänge angesehen werden können. Diese Reihen enthalten die Einflußfunktionen als universelle Koeffizienten sowie Stoffkennzahlen (K -Zahlen) und die Heizrate ε als Parameter. Durch Festlegen der Stoffkonstanten kann mittels dieser Reihen dann für das entsprechende Fluid für beliebige Werte von ε der kritische Wert für das Einsetzen der Instabilität angegeben werden. Da es sich um asymptotische Entwicklungen der kritischen Parameter (Kennzahlen) handelt, können die so evaluierten Ergebnisse nur als Näherungslösungen bei endlichen Werten der Heizrate angesehen werden. Es zeigte sich aber in allen Untersuchungen, daß die Hinzunahme von Termen höherer Ordnung die Ergebnisse bei endlichen Werten von ε erheblich verbesserte. Fast immer konnten so die wichtigsten Effekte zumindest tendenziell gut erfaßt werden.

Im einzelnen sollen die Vorgehensweisen und Ergebnisse in den nächsten Abschnitten noch einmal zusammenfassend erläutert werden.

• Kapitel 3

In Kapitel 3 wurde das Stabilitätsverhalten der horizontalen beheizten

Fluidschicht behandelt. Das mathematische Modell wurde durch Linearisierung der vollständigen in Kapitel 2 vorgestellten Stördifferentialgleichungen unter Berücksichtigung einer zeitlichen Entwicklung der Störungen (absolut instabiles System) hergeleitet. Die Gleichungen sind dann zunächst für den Fall temperaturabhängiger Viskosität bis zur 2. Ordnung ($\mathcal{O}(\varepsilon^2)$) entwickelt worden. Zweck dieser Entwicklung war es, die Einflußfunktionen für eine Reihendarstellung der kritischen Rayleigh-Zahl in Abhängigkeit der Heizrate ε zu erhalten. Sowohl die entwickelten Gleichungen als auch Berechnungen nach der kombinierten Methode zeigten, daß die kritische Rayleigh-Zahl eine gerade Funktion der Heizrate ist. Eine weitere allgemeingültige Aussage konnte bezüglich der Einteilung von Fluiden gemacht werden. Fluide, bei denen der Viskositätseffekt gegenüber allen anderen Stoffwerteinflüssen überwiegt, können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Bei Fluiden der ersten Gruppe ($K_\eta^2 > K_{\eta 2}$) setzt eine Konvektionsströmung früher ein als bei Fluiden mit konstanten Stoffwerten. Ein umgekehrtes Verhalten zeigen Fluide der zweiten Gruppe ($K_\eta^2 < K_{\eta 2}$). Sie werden erst bei höheren Rayleigh-Zahlen gegenüber infinitesimalen Störungen instabil. Eine solche Unterteilung anhand der Stoffeigenschaften ist präziser als nur eine Unterteilung in Gase und Flüssigkeiten zu vollziehen, wie es in der Literatur häufig geschieht.

Die Untersuchungen bezüglich der Einflüsse der anderen Stoffwerte auf die kritische Rayleigh-Zahl sind mit der kombinierten Methode durchgeführt worden. Eine allgemeingültige Beziehung für die kritische Rayleigh-Zahl wurde angegeben, die es zuläßt, für jeden beliebigen Stoff und jede beliebige Bezugstemperatur den kritischen Wert der Kennzahl zu berechnen, ohne eine erneute Stabilitätsanalyse durchführen zu müssen. Es zeigte sich, daß der Einfluß der Wärmeleitfähigkeit λ durch sehr große Werte der Einflußfunktionen im Ergebnis repräsentiert wird. Der reale Effekt wird jedoch immer im Zusammenhang mit den Stoffeigenschaften (Stoffkennzahlen) bestimmt, so daß die Größe der Einflußfunktionen in diesem Fall nur bei Gasen zur Wirkung kommt (s. Abbildung 3.5). Ein weiterer wichtiger Ef-

fekt ist der Dichteeffekt. Auch hier sind die Stoffkennzahlen entscheidend. So ist der reale Effekt in Gasen besonders hoch (großes K_ρ). Zu berücksichtigen ist jedoch, daß dieser Effekt nur realistisch durch das Modell beschrieben wird, wenn offene Systeme betrachtet werden, also die Dichte näherungsweise druckunabhängig ist (s. Kapitel 3). Da die K -Zahlen für die Viskosität bei Flüssigkeiten, verglichen mit den K -Zahlen der anderen Stoffwerte, besonders hoch sind, ist der Viskositätseffekt dort erwartungsgemäß der dominante Effekt. Der Einfluß temperaturabhängiger spezifischer isobarer Wärmekapazität stellte sich als sehr gering heraus, da die Temperaturabhängigkeit dieser Größe in den meisten Fällen gegenüber allen anderen Stoffwerten vernachlässigbar ist.

• Kapitel 4

Die Stabilität der natürlichen Konvektionsgrenzschicht an der vertikalen beheizten Platte mit temperaturabhängigen Stoffwerten ist in Kapitel 4.3 untersucht worden. Die Berechnungen, basierend auf der erweiterten Orr–Sommerfeld–Analyse, haben gezeigt, daß entgegen der Meinung verschiedener Autoren der Viskositätseffekt für Flüssigkeiten, sofern nur Effekte 1. Ordnung betrachtet werden, für $T_w^* < T_\infty^*$ stabilisierend und für $T_w^* > T_\infty^*$ destabilisierend wirkt. Umgekehrtes gilt für Gase. Diese andere Beurteilung ist die Folge einer anders gewählten Bezugstemperatur $T_B^* = T_\infty^*$. In der Literatur wird häufig die Filmtemperatur $T_{film}^* = (T_w^* + T_\infty^*)/2$ verwendet, die jedoch zu einer irreführenden Beurteilung des Viskositätseffektes gegenüber dem Fall konstanter Stoffwerte führen kann.

Die Untersuchung der anderen Stoffwerteffekte zeigte, daß besonders der Dichteinfluß eine große Rolle spielt, da hierfür die Einflußfunktion 1. Ordnung (A_ρ) die größten Werte annimmt. Auch der Viskositätseffekt wird durch einen großen Wert der Einflußfunktion repräsentiert. Der reale Effekt ist jedoch wiederum durch die Kombination aus Einflußfunktion und Stoffkennzahl bestimmt, so daß dieser je nach Fluid sehr unterschiedlich sein kann. Für den in Kapitel 4.3 angegebenen Fall eines wasserähnlichen

Fluides bei einer Bezugstemperatur von etwa 20°C war der stärkste Effekt auf die kritische Grashof-Zahl durch die Dichtevariation im Auftriebsterm gegeben ($A_{\rho A}$ -Effekt). Obwohl hier die Einflußfunktion 1. Ordnung nur verhältnismäßig kleine Werte annimmt, tritt aufgrund eines sehr großen Wertes für die K -Zahl ($K_{\rho A} = 15.89$) eine starke Beeinflussung des Stabilitätsverhaltens der Strömung auf. Im untersuchten Fall wirkte dieser Effekt dem der Viskosität entgegen, so daß eine Stabilisierung der Strömung eines wasserähnlichen Fluides für $T_w^* > T_\infty^*$ und eine Destabilisierung für $T_w^* < T_\infty^*$ unter Berücksichtigung aller Effekte berechnet werden konnte.

Die Anwendung der PSE-Gleichungen auf diesen Strömungstyp ist in Kapitel 4.4 erfolgreich durchgeführt worden. Dabei sind zunächst die von Brooker (1996) eingeführten modifizierten Gleichungen (lokale Lösungen) überprüft und mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation (Brooker (1996)) verglichen worden. Gute Übereinstimmung wurde erwartungsgemäß für große Grashof-Zahlen gefunden. Daraufhin wurden die vollständigen PSE-Gleichungen gelöst und sowohl mit Ergebnissen der modifizierten Gleichungen als auch mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation verglichen. Die vollständigen PSE-Gleichungen zeigten eine bessere Übereinstimmung mit den DNS-Ergebnissen im wandnahen Bereich und auch im Bereich kleinerer Grashof-Zahlen. Der Vergleich der Indifferenzkurven aus der PSE-Analyse (neutrale Kurven für die Geschwindigkeits- und Temperaturschwankung) mit der neutralen Kurve aus einer OSE-Analyse für eine Prandtl-Zahl von $Pr = 0.733$ (entspricht in etwa Luft bei 293 K und 1 bar) zeigte relativ große Abweichungen zwischen den beiden Theorien. Dies liegt zum einen in der willkürlichen Definition der Anfachungsrate und zum anderen in den zusätzlichen Nichtparallelitätseffekten bei der PSE-Analyse begründet.

• Kapitel 5

In Kapitel 5.3 wurde die Stabilität der Grenzschichtströmung mit bzw. ohne Druckgradient unter Einfluß eines Temperaturfeldes mit der thermi-

schen Randbedingung $T_w = \text{konst.}$ untersucht. Die asymptotische Betrachtung des Problems zeigt, daß bei der erzwungenen Konvektion nicht alle Stoffwerteffekte von asymptotisch gleicher Größenordnung sind. Dichte- und Viskositätseffekt treten hier als Effekte 1. Ordnung auf, während die Temperaturabhängigkeit der anderen Stoffwerte nur Effekte höherer Ordnung darstellen. Für die Grenzschichtströmung mit Druckgradient sind daher zunächst nur die Effekte 1. Ordnung untersucht worden. Dabei ist besonderes Augenmerk auf das Zusammenwirken von Druckgradient und Effekten variabler Stoffwerte gelegt worden. Die Wirkung eines Druckgradienten auf die Stabilität einer Strömung ist bekannt. Ein negativer Druckgradient wirkt destabilisierend, ein positiver stabilisierend. Die Annahme der zusätzlichen Verstärkung der Effekte variabler Stoffwerte durch einen negativen oder positiven Druckgradienten erwies sich jedoch nur bedingt als richtig. Es ist vielmehr so, daß dies nur bei sehr kleinen sowohl positiven als auch negativen Druckgradienten zutrifft. Bei Erhöhung bzw. Erniedrigung des Druckgradienten heben sich die Effekte dann jedoch teilweise auf. Eine allgemeine Aussage ist deshalb und aufgrund des Einflusses eines weiteren Parameters, der Prandtl-Zahl, nur begrenzt möglich.

Effekte höherer Ordnung sowie der Einfluß der thermischen Randbedingungen sind am Beispiel der Grenzschichtströmung an der ebenen Platte analysiert worden (Kapitel 5.3.1). Wie zu vermuten war, sind die Effekte höherer Ordnung und im speziellen die Effekte variabler spezifischer isobarer Wärmekapazität bzw. variabler Wärmeleitfähigkeit vernachlässigbar gegenüber dem Einfluß der Dichte und der Viskosität auf die Stabilität der Plattengrenzschicht. Wie groß jedoch die realen Effekte sind, hängt natürlich von den Stoffdaten der untersuchten Fluide ab. Anhand der Einflußfunktionen in Tabelle 5.1 können sie jedoch im Zusammenhang mit den Stoffdaten in etwa abgeschätzt werden. Eine Verbesserung der Ergebnisse wird bei diesem Strömungstyp durch die Hinzunahme der Terme höherer Ordnung erzielt. Für die tendentielle Vorhersage des Stabilitätsverhaltens reicht es aber aus, nur Terme 1. Ordnung zu betrachten.

In Abschnitt 5.3.1 sind Untersuchungen mit der thermischen Randbedingung $q_w = \textit{konst.}$ gemacht worden. Hier zeigt sich nur ein unwesentlicher Unterschied zu dem Fall konstanter Wandtemperatur, da Strömungs- und Temperaturfelder durch die andere Wahl der Randbedingung nur geringfügig beeinflußt werden.

Im zweiten Teil von Kapitel 5 (Kapitel 5.4) ist dann ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der erweiterten Orr–Sommerfeld–Analyse und einer Analyse basierend auf den PSE–Gleichungen durchgeführt worden. Es ist jedoch nur bedingt möglich, hier einen Vergleich zu ziehen, da die Ergebnisse aus einer PSE–Analyse einen gewissen Freiheitsgrad aufweisen, der von der Definition der Anfachungsrate herrührt (s. Kapitel 2.2.3). Dennoch zeigen die Ergebnisse aus der lokalen parallelen Stabilitätsanalyse das gleiche Verhalten wie Ergebnisse aus der nichtlokalen nichtparallelen Stabilitätsanalyse mit den PSE–Gleichungen. Der Unterschied wird von vielen Autoren im Bereich hoher Frequenzen gesehen. Diese Aussage, so stellte sich bei der Berechnung von Anfachungsraten 1. Ordnung heraus, gelten nicht für die Stoffwerteffekte. Die Anfachungsraten 1. Ordnung für den Dichte- und Viskositätseffekt zeigen in etwa die gleichen Abweichungen bei allen Frequenzen (s. Abbildung 5.12). Diese Abweichungen liegen aber im Bereich weniger Prozente. Eine Analyse der Stoffwerteffekte für die ebene Plattengrenzschicht auf Basis der PSE–Gleichungen ist daher nicht zwingend erforderlich.

• Kapitel 6

Ziel der Untersuchungen in Kapitel 6 war die Beurteilung des Einflusses der Temperaturschwankungen auf die Stabilität einer Grenzschichtströmung. Die asymptotische Entwicklung der Anfachungsrate bis zur 1. Ordnung läßt die Aufspaltung der Effekte in zwei Anteile zu. Der erste rührt von dem Einfluß des gemittelten Temperaturfeldes (Grundströmung) her, ein weiterer Anteil stammt aus dem Einfluß des Temperaturschwankungsfeldes. Für die Effekte 1. Ordnung (Dichte- und Viskositätseffekt) zeigte sich,

daß grundsätzlich eine starke Prandtl-Zahlabhängigkeit besteht. Mit abnehmender Prandtl-Zahl verschwindet auch der Einfluß der Temperaturschwankungen. Dabei unterschieden sich die Ergebnisse für den Effekt variabler Dichte von denen für den Effekt variabler Viskosität durch einen mehrfach größeren Anteil der Temperaturschwankungen an der Gesamtanfachungsrate. Bei Gasen macht der Anteil der Temperaturschwankungen nahezu den Gesamtanteil aus und ist folglich nicht zu vernachlässigen.

In Kapitel 6.3 wurde das Entstehungsverhalten der Temperaturschwankungen und die damit verbundene räumliche Entwicklung der Anfachungsraten 1. Ordnung untersucht. Dieser Effekt ist besonders dann von Bedeutung, wenn ein Temperaturfeld in der Grenzschicht nicht von Anfang an "eingeschaltet" ist, wie es z.B. bei Stabilitätsbeeinflussung durch Heizstreifen der Fall ist. Da die thermische Energiegleichung für die Temperaturstörung diffusiven Charakter besitzt, bedarf es einiger Zeit bzw. einer gewissen Entwicklungslänge bis zur vollständigen Ausbildung der Temperaturschwankung. Für eine daraus resultierende Entwicklungslänge der Anfachungsraten 1. Ordnung stellte sich ein wesentlich kleinerer Wert heraus. Während die Amplitudenfunktion der Temperaturstörung etwa die 3.8-fache Wellenlänge für das Erreichen der "endgültigen" Form benötigte, entfaltete sich die Wirkung auf die Stabilität in Form der Anfachungsraten 1. Ordnung schon nach ca. 0.5 (α_{ip2}) bzw. 2 Wellenlängen ($\alpha_{i\eta2}$). Da dieses Verhalten noch von der Frequenz der Störung und von der Prandtl-Zahl abhängt, kann diese Aussage nur als Anhaltspunkt gesehen und muß im speziellen Fall genauer untersucht werden. Für die angegebenen Parameter ist die Annahme eines vollentwickelten Temperaturschwankungsfeldes jedoch vertretbar. Wenn dies auch für andere Frequenzen und Prandtl-Zahlen in ähnlicher Weise Gültigkeit besitzt, ist eine erweiterte Orr-Sommerfeld-Analyse bei relativ kurzen Heizstrecken nur mit geringen Fehlern behaftet, und sie kann dort problemlos eingesetzt werden. Bei einer ausreichend langen Heizstrecke (einige Wellenlängen) ist kaum ein Unterschied im Vergleich zu Ergebnissen mit den vollständigen PSE-Gleichungen zu erwarten,

zumal die Gesamtanfachungsraten (Effekt der mittleren und der Schwingungstemperatur) 1. Ordnung in Kapitel 5 keinen großen Unterschied erkennen ließen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die untersuchten Strömungen ein sehr unterschiedliches Stabilitätsverhalten in Bezug auf den Einfluß der Wärmeübertragung zeigten. Es konnten jedoch allgemeingültige Aussagen für jeden Strömungstyp angegeben werden, mit Hilfe derer es möglich ist, zumindest tendentielle Voraussagen für das Auftreten von instabilen Zuständen in Abhängigkeit von der Heizrate anzugeben. Da es sich bei der angewandten Theorie um eine asymptotische Theorie für kleine Heizraten handelt, ist nicht unbedingt zu erwarten, daß die Ergebnisse bei endlichen Werten des Heizparameters ε ein genaues Abbild der Realität darstellen. Sie können jedoch in einigen Fällen als brauchbare Näherungen verwendet werden.

A Lösbarkeitsbedingung für die Stabilitätsgleichungen erster und höherer Ordnungen

Die aus der asymptotischen Entwicklung resultierenden Stabilitätsgleichungen 1. und höherer Ordnungen sind lineare Gleichungssysteme und können in der Form

$$\mathbf{A}\vec{x} = \alpha_1 \vec{b} + \vec{c} \quad (\text{A.1})$$

geschrieben werden. Hierbei ist \mathbf{A} eine komplexe $N \times N$ Matrix mit Rang $N-1$. D.h., das homogene Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = 0$, welches für die Stabilitätsgleichungen 0. Ordnung steht, hat eine nichttriviale Lösung. Es existiert eine LU-Faktorisierung, so daß

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

wobei

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix}$$

eine untere (lower) und

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eine obere (upper) Dreiecksmatrix ist. Der Rang von \mathbf{U} ist $N-1$, was sich durch den Nulleintrag in der letzten Zeile ausdrückt. Damit läßt sich das Problem als

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\vec{x} = \alpha_1\vec{b} + \vec{c}$$

schreiben. \mathbf{L} ist invertierbar. Es ergibt sich

$$\underbrace{\mathbf{U}\vec{x}}_{\vec{x}} = \alpha_1 \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\vec{b}}_{\vec{b}} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\vec{c}}_{\vec{c}} .$$

Der Vektor \vec{x} hat als letzte Komponente einen Nulleintrag. Daraus folgt, daß auch die rechte Seite $(\alpha_1\vec{b} + \vec{c})$ einen Nulleintrag als letzte Komponente haben muß, damit eine Lösung für \vec{x} existiert.

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{b}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \\ \vdots \\ \underline{c}_N \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Die **Lösbarkeitsbedingung** für das Gleichungssystem (A.1) ist dann

$$\alpha_1 \underline{b}_N + \underline{c}_N = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Es ergibt sich unmittelbar der Wert für α_1 , welcher –je nach Entwicklung– der Anfachungsrate 1. Ordnung bzw. anderen Einflußfunktionen in der Stabilitätsanalyse entspricht.

B Numerische Aspekte der Lösungsverfahren

B.1 Grenzschichtgleichungen

Die Grenzschichtgleichungen (Kapitel 4, 5) sind partielle parabolische Differentialgleichungen. Die Berechnung dieser Gleichungen läßt sich nach einer sogenannten **marching procedure** durchführen. Dabei könnte das Strömungsfeld und das Temperaturfeld ausgehend von einer Stelle x_0 stromabwärts berechnet werden. Die Anfangs- sowie die Randbedingungen an beiden Rändern müssen vorliegen. In dieser Arbeit sind die Grenzschichtgleichungen für Spezialfälle gelöst worden, in denen das Strömungs- und Temperaturfeld selbstähnlichen oder quasiselbstähnlichen Charakter haben. In diesen Fällen konnten die Gleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Zur Lösung dieser Gleichungen ist dann ein n -Parameter Einschußverfahren in Kombination mit einer Runge-Kutta-Integration verwendet worden. Die Anzahl der Einschußparameter richtet sich nach der Anzahl der zu lösenden Gleichungen und ist z.B. für eine asymptotische Entwicklung der Grenzschichtgleichungen bis zur 1. Ordnung $n = 4$.

B.2 Stabilitätsgleichungen bei lokaler paralleler Stabilitätsanalyse

B.2.1 Tschebyscheff-Kollokationsmethode

Die Stabilitätsgleichungen für die lokale parallele Stabilitätsanalyse sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Zur Lösung dieser Gleichungen sind unterschiedliche Verfahren verwendet worden, wodurch eine genaue Überprüfung

der Ergebnisse ermöglicht wurde. Im Falle der Rayleigh–Bénard Konvektion (Kapitel 3) und der natürlichen Konvektion an der vertikalen beheizten Platte (Kapitel 4) kam ausschließlich eine Tschebyscheff–Kollokationsmethode zum Einsatz. Diese Methode fordert die Erfüllung der Differentialgleichung für die abhängigen Variablen \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\Theta}$ in einer Anzahl N diskreter Stützstellen (Kollokationspunkte). Die abhängigen Variablen werden als Reihe der Form

$$\hat{a} = \sum_{n=0}^N \hat{c}_{na} T_n(y) ; \quad (a = u, v, \Theta) \quad (\text{B.1})$$

angesetzt. Dabei sind $T_n(y)$ die Tschebyscheff–Polynome

$$T_n(y) = \cos [n \arccos (2 e^{-y/C} - 1)] . \quad (\text{B.2})$$

Mit Hilfe von Gleichung (B.2) wird das halbumendliche Intervall (nur bei Grenzschichtströmungen) $[0, \infty]$ auf das endliche Intervall $[-1, 1]$ abgebildet (Definitionsbereich der Tschebyscheff–Polynome). Dabei ist C eine willkürliche Konstante, durch die die Verteilung der Kollokationspunkte in der Grenzschicht und somit auch die Genauigkeit der Lösungen gesteuert werden kann (s. Laurien (1985)). Mit Gleichung (B.1) kann dann die erweiterte Orr–Sommerfeld–Gleichung (s. Kapitel 2.2.3) wie folgt diskretisiert werden:

$$[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \vec{\Psi} = \quad (\text{B.3})$$

$$[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \end{Bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \hat{c}_{0u} \\ \hat{c}_{1u} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nu} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \hat{c}_{0v} \\ \hat{c}_{1v} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nv} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \hat{c}_{0\Theta} \\ \hat{c}_{1\Theta} \\ \vdots \\ \hat{c}_{N\Theta} \end{Bmatrix} \right\}^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

mit

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} T_0(y_1) & T_1(y_1) & \cdots & T_N(y_1) \\ T_0(y_2) & T_1(y_2) & \cdots & T_N(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(y_{N-1}) & T_1(y_{N-1}) & \cdots & T_N(y_{N-1}) \end{bmatrix} .$$

Bei dieser etwas ungewöhnlichen Darstellung werden die abhängigen Variablen \hat{u} , \hat{v} und $\hat{\Theta}$ an jeder Stelle y_n jeweils durch das Produkt der Matrix \mathbf{T}_N und dem entsprechenden Spaltenvektor $\{\hat{c}_{0a}, \hat{c}_{1a}, \dots, \hat{c}_{Na}\}^T$ dargestellt. Um wieder alle drei Gleichungen zu erhalten (Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung), muß $\{\mathbf{T}_N, \mathbf{T}_N, \mathbf{T}_N\}^T$ ein Spaltenvektor mit den Spaltenelementen \mathbf{T}_N sein. Die Matrixmultiplikation mit $[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T$ ist dann für alle y -Koordinaten gleichermaßen durchzuführen.

Die Matrix \mathbf{T}_N beinhaltet nur die y -Koordinaten von y_1 bis y_{N-1} . Es müssen also noch die Randbedingungen diskretisiert werden, um das System (B.3) lösen zu können. Sollen die Schwankungsbewegungen an den Rändern verschwinden, so muß (B.1) für $y = 0$ und $y = y_N$ ($a = \hat{u}, \hat{v}, \hat{\Theta}$) in (B.3) eingesetzt werden.

Die Kollokationspunkte sind so zu wählen, daß die entsprechenden y -Koordinaten den Ort der Maxima des Tschebyscheff-Polynoms mit der höchsten Ordnung n beschreiben (siehe z.B. Gottlieb et al. (1984)). Die Lösung von Gleichung (B.3) mit den entsprechend diskretisierten Randbedingungen kann mit Hilfe eines einfachen Gaussverfahrens berechnet werden. Da das Problem (B.3) jedoch ein Eigenwertproblem mit einem nichtlinear vorkommenden Eigenwert ist, muß ein solcher Lösungsalgorithmus mit einem Newton-Verfahren bzw. mit einer Regula-Falsi-Methode (hier verwendet) zur Bestimmung der Eigenwerte gekoppelt werden.

B.2.2 Einschußverfahren

In dieser Arbeit ist ein weiteres numerisches Verfahren zur Lösung der Stabilitätsgleichungen als Vergleichsmethode benutzt worden. Es soll hier stichwortartig beschrieben werden. Eine ausführliche Beschreibung ist z.B. bei Mack (1976), Schäfer und Herwig (1993) sowie Schäfer et al. (1995) zu finden. Das Einschußverfahren setzt sich aus drei wesentlichen Bestandteilen zusammen:

1. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung mit 6 Fundamentallösungen, entsprechend der Ordnung des Differentialgleichungssystems bei Kopplung

der thermischen Energiegleichung an die Impulsgleichung

2. Runge–Kutta–Integration

3. Zwei–Parameter–Einschußverfahren (mit Regular–Falsi–Methode)

Die Differentialgleichungen werden in dieser Methode in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung zerlegt, welche dann, ausgehend von den Fundamentallösungen des Systems am Rand des Integrationsgebietes, integriert werden. Dabei werden die Fundamentallösungen nach einigen Rechenschritten einer Gram–Schmidt–Orthonormalisierung unterzogen, um die durch die Steifheit des Systems aufkommenden numerischen Fehler zu vermeiden.

Zum Vergleich der beiden Methoden sind in Tabelle B1 Eigenwerte für die Orr–Sommerfeld Gleichung berechnet und gegenübergestellt worden.

Tabelle B1: Vergleich der verschiedenen Lösungsmethoden

		Jordinson (1970)		Kollokationsmethode		Einschußverfahren	
Re	ω	α_r	α_i	α_r	α_i	α_r	α_i
336	0.1297	0.3084	0.0079	0.30835	0.007939	0.30835	0.007941
598	0.1201	0.3079	−0.0019	0.30785	−0.001897	0.30785	−0.001894
998	0.1122	0.3086	−0.0057	0.30859	−0.005709	0.30859	−0.005705

B.3 Stabilitätsgleichungen bei nichlokaler nichtparalleler Stabilitätsanalyse (PSE–Gleichungen)

Die PSE–Gleichungen sind ein Gleichungssystem partieller parabolischer Differentialgleichungen. Genau wie die Grenzschichtgleichungen werden sie durch eine "marching procedure" gelöst. Die Lösung erfordert das Vorhandensein von Anfangsbedingungen, die, wie schon in Kapitel 2.2.3 erläutert, durch die lokalen Lösungen der PSE–Gleichungen bereitgestellt werden. Diese sind mittels der schon beschriebenen Kollokationsmethode analog zum

Orr–Sommerfeld–Problem bestimmt worden. Die PSE–Gleichungen sind in y –Richtung (senkrecht zur Strömungsrichtung) ebenfalls durch die oben angegebenen Tschebyscheff–Polynome diskretisiert worden. Die Diskretisierung der Gleichungen in Strömungsrichtung erfolgte durch finite Differenzen. Dabei sind die x –Ableitungen durch Zentraldifferenzen an der Stelle $x_{j+1/2}$ approximiert worden. Die PSE–Gleichungen lassen sich dann zu

$$\begin{aligned} \left[[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T \right] \frac{\vec{\Psi}_{j+1} + \vec{\Psi}_j}{2} \\ + [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \frac{\vec{\Psi}_{j+1} - \vec{\Psi}_j}{\Delta \hat{x}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

angeben.

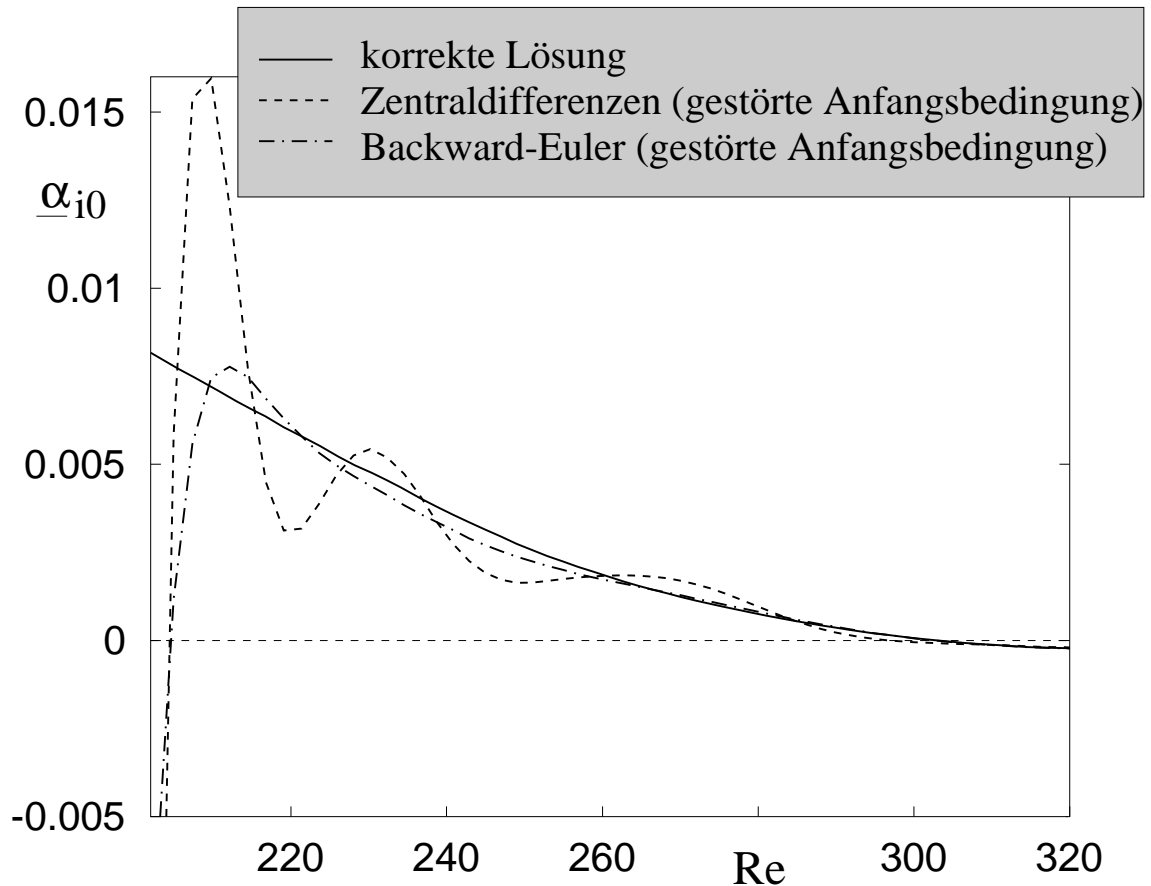


Abb. B.1 : Vergleich der "backward Euler" Diskretisierung mit einer Zentralschiedendifferenzdiskretisierung der PSE–Gleichungen in x –Richtung; Die Anfangsbedingungen sind hierbei abweichend von der korrekten lokalen Lösung vorgegeben worden ($F = 240 \cdot 10^{-6}$, Blasius'sche Grenzschichtströmung).

Bei der Lösung der Gleichungen stellt sich heraus, daß es während der ersten Rechenschritte durch Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen zur Ausbildung von Oszillationen in der Lösung kommen kann (transientes Verhalten).

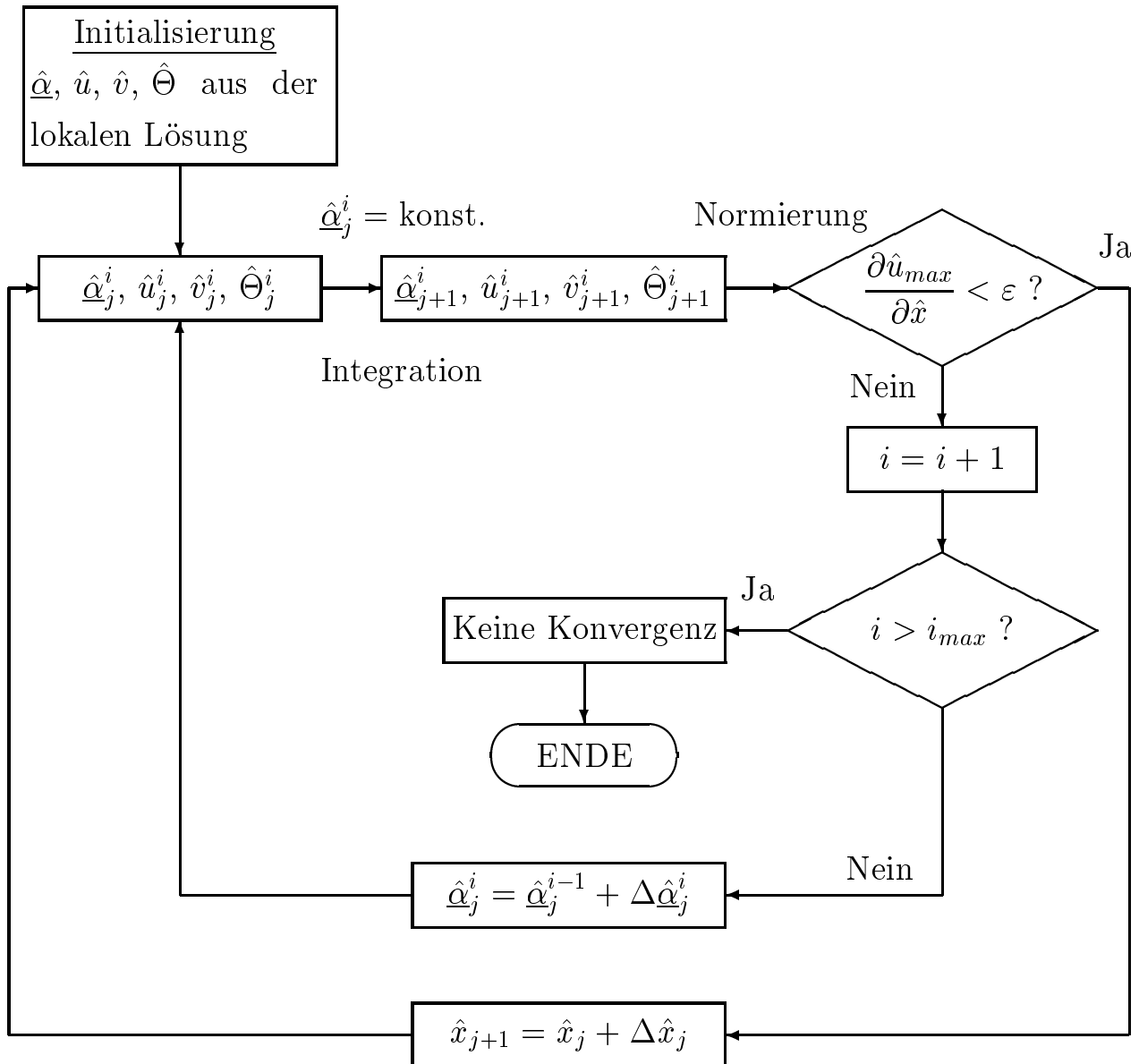


Abb. B.2 : Ablaufplan des Programms zur Berechnung der PSE-Gleichungen

Eine sogenannte **backward Euler** Formulierung der finiten Differenzen ist für die ersten Schritte daher angebracht, da dadurch die auftretenden Oszillationen

gedämpft werden (s. Abbildung B.1).

$$\begin{aligned} \left[[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T \right] \Delta \hat{x} + [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \vec{\Psi}_{j+1} = \\ [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \vec{\Psi}_j \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Die Lösung der vollständigen Gleichungen erfolgt dann nach dem Schema B.2.

B.4 Implementierung

Der vollständige Quellcode des Programmes zur Berechnung der PSE-Gleichungen umfaßt 18 Unterprogramme. Innerhalb dieser 18 Unterprogramme werden sowohl die Grundströmungsgleichungen (Grenzschichtgleichungen, Kapitel 4 und Kapitel 5) gelöst als auch die lokalen Stabilitätsgleichungen zur Bestimmung der Anfangsbedingungen (lokale Lösungen). Weiterhin sind Unterprogramme zur Steuerung der Ein- und Ausgabe vorhanden sowie zwei Unterprogramme zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (Gauss-Verfahren, LU-Dekomposition). Aufgrund dieser Komplexität soll hier auf ein komplettes Programmlisting des erstellten Codes verzichtet werden. Es soll statt dessen gezeigt werden, in welcher Weise die Umsetzung des physikalischen Problems in einen Algorithmus vollzogen wurde. Zu diesem Zweck werden die wesentlichen Punkte der Implementierung im folgenden erläutert.

B.4.1 Diskretisierung

Sowohl die vollständigen PSE-Gleichungen als auch die Orr-Sommerfeld-Gleichungen und die Gleichungen zur Bestimmung der lokalen Lösungen sind senkrecht zur Strömungsrichtung durch ein Tschebyscheff-Kollokationsverfahren diskretisiert worden (s. Kapitel B.2.1). Dabei wird jede abhängige Größe des Problems nach (B.1) als Summe von Tschebyscheff-Polynomen dargestellt. Die diskretisierten Gleichungen lassen sich dann nach (B.3) als Produkt aus

einer $M \times M$ Koeffizientenmatrix und einem $M \times 1$ Vektor darstellen. Dabei bedeutet M die Anzahl der Kollokationspunkte multipliziert mit der Anzahl der abhängigen Variablen des Problems, wobei die Anzahl der Kollokationspunkte ($K = N + 1$) der Anzahl der Aufpunkte im Berechnungsgebiet entspricht. Im Falle der Stabilitätsgleichungen für ein Problem mit Wärmeübertragung handelt es sich um die abhängigen Variablen \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\Theta}$. Dann resultiert aus der Diskretisierung des Orr–Sommerfeld Problems nach (B.3) eine Koeffizientenmatrix der Größe $(3K) \times (3K)$ und der gesuchte Lösungsvektor hat die Größe $(3K) \times 1$. Eine Diskretisierung der Gleichungen für die lokalen Lösungen hingegen (Aufspaltung der abhängigen Variablen in einen Teil 0. Ordnung (\hat{u}_0 , \hat{v}_0 , $\hat{\Theta}_0$) und einen Teil 1. Ordnung (\hat{u}_1 , \hat{v}_1 , $\hat{\Theta}_1$)) führt zu einer Koeffizientenmatrix der Größe $(6K) \times (6K)$ und einem Lösungsvektor der Dimension $(6K) \times 1$.

Randbedingungen

Die Randbedingungen für die Stabilitätsgleichungen werden bei $y = 0$ und $y = \infty$ gesetzt (Grenzschichten). Hier müssen alle Schwankungsbewegungen verschwinden (s. oben). Somit wird aus (B.1)

$$y = 0 : \quad \hat{a} = \sum_{n=0}^N \hat{c}_{na} = 0 ; \quad (a = u, v, \Theta) \quad (\text{B.6})$$

bzw.

$$y = \infty : \quad \hat{a} = \sum_{n=0}^N \hat{c}_{na}(-1)^n = 0 ; \quad (a = u, v, \Theta) . \quad (\text{B.7})$$

Auch die PSE–Gleichungen (B.5) lassen sich nach (B.3) in der y –Richtung diskretisieren. Dazu wird Gleichung (B.5) in Matrizenform angegeben zu

$$\hat{\mathbf{A}} \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0u} \\ \hat{c}_{1u} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nu} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0v} \\ \hat{c}_{1v} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nv} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0\Theta} \\ \hat{c}_{1\Theta} \\ \vdots \\ \hat{c}_{N\Theta} \end{array} \right\} \right\}_{j+1}^T = \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \underbrace{\left\{ \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0u} \\ \hat{c}_{1u} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nu} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0v} \\ \hat{c}_{1v} \\ \vdots \\ \hat{c}_{Nv} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \hat{c}_{0\Theta} \\ \hat{c}_{1\Theta} \\ \vdots \\ \hat{c}_{N\Theta} \end{array} \right\} \right\}}_{\vec{R}}^T,$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[[\mathcal{K}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0]^T + [\mathcal{K}_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{E}_1]^T \right] \Delta \hat{x} + [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \end{array} \right\}$$

und

$$\hat{\mathbf{D}} = [\mathcal{K}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{E}_2]^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \end{array} \right\}.$$

Gleichung (B.8) kann dann direkt in das Programm übernommen werden. Dabei sind die Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome ($\hat{c}_{na,j}$) an der Stelle j aus dem letzten Schritt (in x -Richtung) bekannt und damit auch die gesamte rechte Seite \vec{R} . Zu berechnen sind nur noch die Koeffizienten ($\hat{c}_{na,j+1}$) an der Stelle $j+1$ (Lösungsvektor). Die Übertragung dieser Gleichung in das Programm wird durch Tabelle B2 verdeutlicht, die die Koeffizientenmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ und die diskretisierten Randbedingungen (B.6) und (B.7) enthält (ohne therm. Energiegleichung). Sowohl die Matrix $\hat{\mathbf{A}}$, als auch der Vektor \vec{R} sind an der Stelle $j+1/2$, also jeweils bei $\Delta \hat{x}/2$ zu bestimmen.

Die Rechte Seite der Gleichung (B.8) kann in ein ähnliches Schema geschrieben werden, jedoch handelt es sich hierbei nicht um eine Matrix sondern um einen Vektor \vec{R} (s. Tabelle B3).

Sind nun die Koeffizientenmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ und der Vektor \vec{R} in entsprechenden Feldern im Programm abgelegt, geht es darum die Vektoren $\vec{c}_{nu,j+1}$, $\vec{c}_{nv,j+1}$ und $\vec{c}_{n\Theta,j+1}$

zu bestimmen, also die Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome an der Stelle $j + 1$.

Tabelle B2 : *Belegung der Koeffizientenmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ für die linke Seite der PSE-Gleichungen (Diskretisierung in x -Richtung nach (B.5))*

	$\hat{\mathbf{A}}$	$I = n + 1 \quad (n = 0 \dots K - 1)$	
		\hat{u}	\hat{v}
y	J	1 ... K	K+1 ... 2K
$y = 0$	1	1	0
$y = y_1$	2	$[(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1) \Delta \hat{x}$	$[(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1) \Delta \hat{x}$
\vdots	\vdots	$+ \mathcal{K}_2]_u T_n(y)$	$+ \mathcal{K}_2]_v T_n(y)$
$y = \infty$	K	$(-1)^n$	0
$y = 0$	K+1	0	1
$y = y_1$	K+2	$[(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1) \Delta \hat{x}$	$[(\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1) \Delta \hat{x}$
\vdots	\vdots	$+ \mathcal{M}_2]_u T_n(y)$	$+ \mathcal{M}_2]_v T_n(y)$
$y = \infty$	2K	0	$(-1)^n$

Das System (B.8) kann vereinfacht als

$$\hat{\mathbf{A}} \vec{c} = \vec{R} \quad (\text{B.9})$$

dargestellt werden. Ein solches Gleichungssystem läßt sich problemlos mittels der LU-Faktorisierung oder mit einem Gaussalgorithmus nach dem gesuchten Vektor \vec{c} auflösen. Dabei ist jedoch zu beachten, das ein Gaussalgorithmus mehr Rechenoperationen erfordert und daher auch mehr Rechenzeit in Anspruch nimmt, als die LU-Faktorisierung. Aus diesem Grund ist im Programm der LU-Faktorisierung der Vorzug gegeben worden.

Zur Lösung des Systems (B.8) ist die Vorgabe von Anfangswerten für die Funktionen $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$, $\hat{\Theta}(y)$ und die Anfachungsrate $\hat{\alpha}$ an einer Stelle \hat{x}_0 (Re_0 , Gr_0)

nötig. Sie können, wie in Kapitel 2 schon angesprochen, durch Lösung des Eigenwertproblems (2.24) erhalten werden.

Tabelle B3 : Belegung des Vektors \vec{R} für die rechte Seite der PSE-Gleichungen (Diskretisierung in x -Richtung nach (B.5))

	\vec{R}	$n = 0 \dots K - 1$
y	J	Kontinuitätsgleichung
$y = 0$	1	$\sum_{n=0}^N \hat{c}_{nu,j}$
$y = y_1$	2	$\mathcal{K}_2 \sum_{n=0}^N \left(\{ \hat{c}_{nu,j}, \hat{c}_{nv,j} \}^T T_n(y) \right)$
\vdots	\vdots	
$y = \infty$	K	$\sum_{n=0}^N \hat{c}_{nu,j} (-1)^n$
		Impulsgleichung
$y = 0$	K+1	$\sum_{n=0}^N \hat{c}_{nv,j}$
$y = y_1$	K+2	$\mathcal{M}_2 \sum_{n=0}^N \left(\{ \hat{c}_{nu,j}, \hat{c}_{nv,j} \}^T T_n(y) \right)$
\vdots	\vdots	
$y = \infty$	2K	$\sum_{n=0}^N \hat{c}_{nv,j} (-1)^n$

Mit diesen Anfangswerten wird dann die Integration von (B.8) mittels LU-Faktorisierung durchgeführt. Dabei wird an die Lösung die Bedingung $\partial \hat{u}_{max} / \partial \hat{x} < \varepsilon$ (ε ist eine kleine Zahl, z.B. $\varepsilon = 10^{-6}$) geknüpft (s. Kapitel 2.2.2, Normierungsbedingung). Der Wert von $\hat{\alpha}$ wird solange entsprechend der durch die Regula-Falsi-Methode gegebenen Vorschrift geändert (Iteration: $i = i + 1$),

bis diese Bedingung erfüllt ist. Erst dann kann die Integration in x -Richtung fortschreiten ($\hat{x}_{j+1} = \hat{x}_j + \Delta\hat{x}_j$).

B.4.2 Programmeigenschaften

Die Genauigkeit der Lösungen der PSE-Gleichungen ist von verschiedenen Faktoren abhängig. So spielen z.B. Anzahl und Verteilung (Parameter C) der Kollokationspunkte eine wichtige Rolle. Aber auch die Schrittweite $\Delta\hat{x}$ hat einen entsprechenden Einfluß auf die Lösungen (s. Bertolotti (1991)). Allerdings, so stellte sich heraus, können keine konstanten Werte hierfür angegeben werden, da diese je nach untersuchtem Problem, Frequenz der Störbewegung und Reynolds-Zahlenbereich stark variieren können. So wurde für die Grenzschichtströmung bei erzwungener Konvektion eine Anzahl von $K = 40 \dots 50$ Kollokationsstellen in Kombination mit einer Verteilungskonstanten $C \approx 19$ verwendet. Für die Untersuchungen an der natürlichen Konvektionsgrenzschicht waren hingegen $K = 50 \dots 60$ Kollokationsstellen nötig und die Verteilungskonstante lag bei $C = 7 \dots 13$ (Je nach Frequenz der Störbewegung und Reynolds-Zahlenbereich). Die optimale Schrittweite für das verwendete Verfahren variierte hier stärker als bei der erzwungenen Konvektion. Sie lag zwischen $\Delta\hat{x} = 3$ und $\Delta\hat{x} = 20$ gegenüber $\Delta\hat{x} = 6 \dots 10$ für die Stabilitätsberechnungen bei z.B. der Blasius'schen Grenzschichtströmung.

Der Algorithmus zur Lösung der vollständigen PSE-Gleichungen (**marching procedure**) ist effizienter als der Algorithmus zur Bestimmung der lokalen Lösungen, da das Gleichungssystem bei gleicher Anzahl der Kollokationsstellen um den Faktor 4 kleiner ist. So benötigt die "marching procedure" für einen Schritt $\Delta\hat{x}$ bei 5 Iterationen ca. 6.2 Sekunden, die Eigenwertbestimmung für die lokale Lösung hingegen 42.4 Sekunden (6 Iterationen). Beide Zeitangaben wurden aus einer Rechnung auf einer **HP 9000/889 K460** mit 40 Kollokationsstellen gewonnen.

Literaturverzeichnis

Airiau, C. (1994): Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE). PhD thesis, CERT-ONERA.

Arnal, D. (1984): Description and prediction of transition in two-dimensional, incompressible flow, AGARD-R-709, 1-47.

Bertolotti, F.P.; Herbert, Th.; Spalart, P.R. (1992): Linear and non-linear stability of the Blasius boundary layer. J. Fluid Mech., Vol. 242, 441-474.

Bertolotti, F.P. (1991): Linear and Nonlinear Stability of Boundary Layers with Streamwise Varying Properties. PhD thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Brooker, A.M.H. (1996): Stability of the Vertical Natural Convection Boundary Layer in a Side-Heated Cavity. PhD thesis, University of Western Australia, Perth.

Brooker, A.M.H. (1998): Private Mitteilungen.

Brooker, A.M.H.; Severin, J.; Herwig, H. (1998): Boundary Layer Control by Heat Transfer Strips: An Asymptotic Approach. Proc. 11th Int. Heat Transfer Conf., Kyongju, Korea.

Busse, F.H.; Frick, H. (1985): Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity. J. Fluid Mech., Vol. 150, 451-465.

Cebici, T., Bradshaw, P. (1977): Momentum Transfer in Boundary-Layers. Hemisphere Publ. Corp., Washington, D.C..

- Chandrasekhar, S. (1961):** Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press.
- Drazin, P.G., Reid, W.H. (1981):** Hydrodynamik stability. Cambridge University Press.
- Fasel, H.F.; Rist, U.; Konzelmann, U. (1990):** Numerical investigation of the three-dimensional development in a boundary layer transition. AIAA J., Vol. 28.
- Fröhlich, J.; Laure, P.; Peyret, R. (1992):** Large departures from the Boussinesq approximation in the Rayleigh–Bénard problem. Phys. Fluids A, Vol. 4, No. 7, 1355–1372.
- Gaster, M. (1974):** On the effects of boundary layer growth on flow stability. J. Fluid Mech., Vol. 66, pp. 465.
- Gebhart, B.; Mahajan (1982):** Instability and Transition in Buoyancy-Induced Flows. Adv. Appl. Mech., Vol. 22, 231–312.
- Gersten, K.; Herwig, H. (1984):** Impuls- und Wärmeübertragung bei variablen Stoffwerten für die laminare Plattenströmung. Wärme-Stoffübertragung, Vol. 18, 25–35.
- Gersten, K.; Herwig, H. (1992):** Strömungsmechanik: Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht. Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Godaux, F.; Gebhart, B. (1974):** An experimental study of the transition of natural convection flow adjacent to a vertical surface. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 17, 93–107.
- Gottlieb, D.; Yousuff, H.; Orszag, S.A. (1984):** Theory and Applications of Spectral Methods. In: Spectral Methods for Partial Differential Equations, ed. by R.G. Voigt, D. Gottlieb, M.Y. Hussaini (SIAM–CBMS, Philadelphia), 1–54.
- Govindarajan, R.; Narasimha, R. (1995):** Stability of spatially developing boundary layers in pressure gradients. J. Fluid Mech., Vol. 300, 117–147.

- Harrison, S.B.; Mee, D.J.; Jones, T.V. (1991):** Experiments on the Influence of Heating on Boundary Layer Transition in Favourable Pressure Gradients. Proc. of Eurotherm 25, 1–6.
- Herbert, Th.; Bertolotti, F.P. (1987):** Stability analysis of nonparallel boundary layers. J. Bull. Am. Phys. Soc., Vol. 32, p. 2079.
- Herbert, Th. (1997):** Parabolized stability equations. Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 29, 245–283.
- Herwig, H. (1985):** Asymptotische Theorie zur Erfassung des Einflusses variabler Stoffwerte auf Impuls- und Wärmeübertragung. Fortschr.–Ber. VDI Reihe 7, Nr. 93, VDI–Verlag, Düsseldorf.
- Herwig, H.; Wickern, G.; Gersten, K. (1985):** Der Einfluß variabler Stoffwerte auf natürliche laminare Konvektionsströmungen. Wärme–Stoffübertrag., Vol. 19, 19–30.
- Herwig, H.; Schäfer, P. (1992):** Influence of variable properties on the stability of two-dimensional boundary layers. J. Fluid Mech., Vol. 243, 1–14.
- Herwig, H.; You, X. (1997):** Thermal Receptivity of Unstable Laminar Flow with Heat Transfer. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, 4095–4103.
- Herwig, H.; Severin, J. (1997):** The Effect of Heat Transfer on Flow Stability. In: Recent Advances in Boundary Layer Theory, CISM Course And Lectures No. 390, Int. Center Mech. Sc., Springer–Verlag, Wien, New York, 75–106.
- Hieber, C.A.; Gebhart, B. (1971):** Stability of vertical natural convection boundary layers: some numerical results. J. Fluid Mech., Vol. 48, 625–646.
- Huerre, P.; Monkewitz, P. (1990):** Local and global instabilities in spatially developing flows. Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, 473–537.
- Jaluria, Y. ; Gebhart, B. (1974):** Stability and transition of buoyancy-induced flows in a stratified medium. J. Fluid Mech, Vol. 66, part 3, 593–612.

- Jang, J.Y.; Mollendorf, J.C. (1988):** The stability of a natural convection boundary layer with temperature dependent viscosity. *Int. J. Eng. Science*, Vol. 26, Iss. 1, 1–12.
- Jordinson, R. (1970):** The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr–Sommerfeld equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 43, p. 801.
- Jordinson, R. (1970):** Spectrum of Eigenvalues of the Orr–Sommerfeld Equation for Blasius Flow. *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 11, p. 2535.
- Keller, H.B. (1978):** Numerical methods in boundary–layer theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 10, 417–433.
- Koschmieder, E. (1993):** Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge University Press.
- Laurien, E. (1985):** Lösung der Orr–Sommerfeld–Gleichung für die Blasius’sche Grenzschichtströmung mittels Chebyshev–Kollokation. DFVLR IB 221–85 A 02, Göttingen.
- Lee, H.R.; Chen, T.S.; Armaly, B.F. (1990):** Nonparallel thermal instability of forced convection flow over a heated, non–isothermal horizontal flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 33, 2019–2028.
- Li, F.; Malik, M.R. (1996):** On the Nature of PSE Approximation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 8, 253–273.
- Mack, L.M. (1976):** A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, 497–520.
- Masad, J.A.; Nayfeh, A.H. (1992):** Laminar flow control of subsonic boundary layers by suction and heat–transfer strips. *Phys. Fluids A*, Vol. 4 (6), 1259–1272.
- Merker G.P. (1987):** Konvektive Wärmeübertragung. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- Nachtsheim, P.R. (1963):** Stability of free-convection boundary-layer flows. NASA TN D-2089.
- Nayfeh, A.H.; El-Hady, N.M. (1980):** Nonparallel stability of two-dimensional nonuniformly heated boundary layer flows. *Phys. Fluids*, Vol. 23 (1), 10–18.
- Nayfeh, A.H. (1993):** Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Oertel, H. Jr.; Delfs, J. (1996):** Strömungsmechanische Instabilitäten. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Popper, K.R. (1994)** Logik der Forschung. Verlag J.C.B. Mohr, Tübingen.
- Potter, M.C.; Graber, E.J., Jr. (1970):** Stability of Plane Poiseuille Flow with Heat Transfer. NASA TN D-6027.
- Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T. (1986):** Numerical Recipes. Cambridge University Press, Cambridge.
- Qureshi, Z.H.; Gebhart, B. (1978):** Transition and transport in a buoyancy driven flow in water adjacent to a vertical uniform flux surface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, 1467–1479.
- Reid, W.H.; Harris, D.L. (1958):** Some Further Results on the Bénard Problem. *Phys. Fluids*, Vol. 1, No. 2, 102–110.
- Sabhapathy, P.; Cheng, K.C. (1986).** The effects of temperature-dependent viscosity and coefficient of thermal expansion on the stability of laminar, natural convective flow along an isothermal, vertical surface. *J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, No. 10, 1521–1529.
- Schäfer, P.; Herwig, H. (1993):** Stability of plane Poiseuille flow with temperature dependent viscosity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, No. 9, 2441–2448.

Schäfer, P.; Severin, J.; Herwig, H. (1995): The effect of heat transfer on the stability of laminar boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 38, No. 10, 1855–1863.

Schäfer, P.; Nölker, K.; Herwig, H. (1995): An Asymptotik Approach to the Stability of Weakly Compressible Boundary Layers. *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, Bd. 75, 401–402.

Schlichting, H. (1982): *Grenzschicht–Theorie*. Braun–Verlag, Karlsruhe, 8. Auflage.

Schlichting, H.; Gersten, K. (1997): *Grenzschicht–Theorie*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg.

Schubauer, G.B.; Skramstad, H.K. (1947): Laminar boundary–layer oscillations and transition on a flat plate, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol 38, pp. 251.

Severin, J. (1993): Theoretische Untersuchungen zur Stabilität von laminaren Strömungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Studienarbeit, Institut für Thermo– und Fluidodynamik, Ruhr–Universität Bochum.

Severin, J.; Herwig, H. (1998): Onset of convection in the Rayleigh–Bénard flow with temperature dependent viscosity: an asymptotic approach. accepted for publication in *ZAMP*.

Squire, H.B. (1933): On the stability of three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* 142, 621–628.

Stengel, K.C.; Oliver, D.S.; Booker, J.R. (1981): Onset of convection in a variable viscosity fluid. *J. Fluid Mech.*, Vol. 120, 411–431.

Stoer, J.; Bulirsch, R. (1978): *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Springer–Verlag, New York.

- Strazisar, A.J.; Reshotko, E.; Prah, J.M. (1977):** Experimental study of heated laminar boundary layers in water. *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, part 2, 225–247.
- Strazisar, A.J.; Reshotko, E. (1978):** Stability of heated laminar boundary layers in water with nonuniform surface temperature. *Phys. Fluids*, Vol. 21 (5), 727–735.
- Van Dyke, M. (1975):** *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California.
- Van Stijn, Th.L.; Van de Vooren, A.I. (1983):** On the stability of almost parallel boundary layer flows. *Comp. Fluids*, Vol. 10, No. 4, 223–241.
- Wazzan, A.R.; Keltner, G.; Okamura, T.T.; Smith, A.M. (1972):** Spatial stability of stagnation water boundary layers with heat transfer. *Phys. Fluids* 15, 2114–2118.
- White, F.M. (1974):** *Viscous fluid flow*. McGraw–Hill, New York.
- Wolfram, S. (1996):** *Mathematica; Ein System für Mathematik auf dem Computer*. Wolfram Research, Inc., Addison–Wesley Verlag (Deutschland) GmbH.
- You X.; Herwig, H. (1997):** Linear stability of channel flow with heat transfer: the important role of reference temperature. *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, 485–496.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Jan Severin
Anschrift	Loerfeldstr. 12 58313 Herdecke
Geburtsdatum	19. Dezember 1966
Geburtsort	Hagen
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

Schulbildung

1973–1977	Grundschule Herdecke–Ostende
1977–1986	Friedrich–Harkort–Gymnasium Herdecke Abschluß: Allg. Hochschulreife

Wehrdienst

07/1986–09/1987	Wehrdienst in Lüneburg/Lübeck
-----------------	-------------------------------

Studium

10/1987–10/1994	Studium des Maschinenbaus, Ruhr–Universität–Bochum Fachrichtung: Wärme– und Strömungstechnik Abschluß: Diplom–Ingenieur
-----------------	---

Beruflicher Werdegang

01/1995–06/95	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermo– und Fluidodynamik der Ruhr–Universität Bochum
seit 07/1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Thermodynamik der Technischen Universität Chemnitz